Numerische Untersuchung des Schwerpunktmodells für nichtlineare, radiale Elektronen-Ionen Schwingungen

Numerical Investigation of the Center of Mass Model for Nonlinear Radial Electron-Ion Oscillations

W. Dommaschk

IPP O/29 Aug.1977

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Numerische Untersuchung des Schwerpunktmodells für nichtlineare, radiale Elektronen-Ionen Schwingungen

Numerical Investigation of the Center of Mass Model for Nonlinear Radial Electron-Ion Oscillations

W. Dommaschk

IPP O/29 Aug.1977

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP O/29

W. Dommaschk

Numerische Untersuchung des Schwerpunktmodells für nichtlineare, radiale Elektronen-Ionen Schwingungen

Numerical Investigation of the Center of Mass Model for nonlinear Radial Electron-Ion Oscilllations

Abstract

A numerical study of nonlinear coherent radial electron-ion dipole oscillations of an electron-ion ring is made. In contrast to an analytical treatment, the numerical approach presented below allows a more realistic nonlinear force law for the collective electron-ion interaction to be included and the time dependence of the magnetic field index and other parameters to be taken into account. For sufficiently small initial disturbances for constant parameters and in the parameter regime where the linear theory of Koshkarev and Zenkevich predicts stability the numerical results are in good agreement with the linear theory. In the linear instability regime, however, the nonlinear force leads to a beating effect instead of exponential growth. The maximum electron amplitudes may become comparable with and the maximum ion amplitudes appreciably larger than the minor ring dimension in this case. If the parameters change with time in such a way that the linear instability regime is crossed, a continuous growth of oscillation amplitudes is observed even beyond this regime. In this case, too, the ion amplitudes become appreciably larger than the electron amplitudes.

Inhalt

1. Einleitung
2. Ausgangsgleichungen
3. Diskussion von Auswertungsergebnissen
4. Schlußbemerkung
5. Anhang 1: Numerische Lösung der Ausgangsgleichungen durch Ermittlung zeitabhängiger Fourier-Koeffizienten
6. Anhang 2: Numerische Lösung der Ausgangsgleichungen durch ein Predictor-Corrector Verfahren
7. Literatur

1. Einleitung

Kohärente radiale Elektronen-Ionen Schwingungen im Elektronen-Ionen-Ring eines Elektronenring-Beschleunigers können experimentell beobachtet werden /1/ und ihre lineare Theorie ist bekannt /2/. Die gemessenen kohärenten Schwingungsamplituden der Elektronen können die Größenordnung der kleinen radialen Ringhalbachse erreichen /3/. Da die kohärente Ablenkung der Ionen in manchen Fällen oder zeitweise genau in Gegenphase zur kohärenten Elektronenauslenkung erfolgt, kann der azimutal lokale Ionenschwerpunkt momentan um mehr als den radialen kleinen Ringhalbmesser gegen den entsprechenden Elektronenschwerpunkt versetzt sein. Bei solchen Auslenkungen verläuft die effektive Wechselwirkungskraft zwischen dem azimutal lokalen Elektronen- und Ionenschwerpunkt stark nichtlinear. Für kleinere Schwerpunktsabstände ändert sich die Kraft proportional, für größere Abstände annähernd umgekehrt proportional mit dem Abstand. Bei genügend großer Elektronen- und Ionenzahl im Ring dürfte diese Art der Nichtlinearität gegenüber anderen Nichtlinearitäten, wie z.B. der Abhängigkeit des magnetischen Feldindex von der Größe der radialen Elektronenauslenkung dominant sein. Dies rechtfertigt zum Teil die hier mehr oder weniger isoliert von anderen Nichtlinearitäten durchgeführte Untersuchung der Nichtlinearität der Elektronen-Ionen Wechselwirkung.

Eine analytische Untersuchung der Auswirkung einer nichtlinearen Elektronen-Ionen-Wechselwirkung wurde in /4/ durchgeführt. Das zugrunde liegende Ring-Modell entspricht weitgehend dem hier verwendeten. Der Unterschied besteht in verschiedenen Annahmen für den nichtlinearen Anteil der Wechselwirkungskraft. Diese wird in /4/ proportional zu $x - px^3$ angesetzt. Dabei ist x der momentane Abstand des Elektronenschwerpunktes vom Ionenschwerpunkt am gleichen Azimut und p eine Konstante. Aus analytischen Gründen muß dabei $|px^3| << |x|$ angenommen werden. Der Gültigkeitsbereich der dort erhaltenen Ergebnisse ist daher auf Schwingungsamplituden begrenzt, die klein sein müssen gegen den kleinen Ring-Halbmesser.

In vorliegendem Bericht wird eine nichtlineare Wechselwirkungskraft proportional zu $x/(1+(x/a)^2)$ angenommen. Dabei ist a von der Größenordnung des kleinen radialen Ring-Halbmessers. Von der numerischen Rechnung her sind hier keine Beschränkungen auf kleine x-Werte erforderlich. Die Elektronenauslenkung muß allerdings als genügend klein gegen den großen Ringradius R vorausgesetzt werden, da wie in /2/ und /4/ angenommen wird, daß die Elektronen in Bezug auf den Gleichgewichts-Ringmittelpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umlaufen. Zu große Kollektivauslenkungen würden sonst unrealistischen Momentanwerten der Elektronen-Umlaufgeschwindigkeit entsprechen. Zu berücksichtigen ist auch, daß das verwendete Ring-Modell ebenso wie in /4 / die durch Streuung der Einzelteilchen-Betatronfrequenzen verursachte Landau-Dämpfung nicht in Betracht zieht. In Wirklichkeit hat man eine Streuung der Einzelteilchenfrequenzen sowohl auf Grund der Energiestreuung der Elektronen als auch wegen der nichtlinearen Abhängigkeit von den individuellen Amplituden. Die nachfolgend gezeigten Ergebnisse müssen unter ausreichender Bewertung dieser Vorbehalte gesehen werden.

2. Ausgangsgleichungen

Die Ausgangsgleichungen für das vorliegende Ring-Modell erhält man aus /2/, /4/ oder /5/, indem man die lineare Wechselwirkungskraft durch den oben erwähnten nichtlinearen Ausdruck ersetzt. Nachfolgend werden weitgehend die in /5/ benützten Bezeichnungen verwendet. Da im Gegensatz zu /5/ kein azimutales Magnetfeld und nur radiale Kollektivauslenkungen angenommen werden, erhält man aus den in /5/ angegebenen Gleichungen:

$$d^2x_e/dt^2 + \omega_{ce}^2\nu_r^2 x_e + \omega_{ce}^2 Q_1^2 (x_e-x_i)/(1+(x_e-x_i)^2/a^2) = 0 \qquad (1)$$

$$d^2x_i/dt^2 + \omega_{ce}^2 Q_i^2 (x_i-x_e)/(1+(x_i-x_e)^2/a^2) = 0 \qquad (2)$$

wobei

$$d/dt = \begin{cases} \partial/\partial t + \omega_{ce}\partial/\partial\phi & \text{für Elektronen} \\ \partial/\partial t & \text{für Ionen} \end{cases} \qquad (3)$$

$$Q_1^2 = k_1 N_i ZR/\gamma a(a+b);\ k_1 = 2r_e/\pi = 1.80 \times 10^{-13}\ \text{cm} \tag{4}$$

$$Q_i^2 = k_i N_e ZR/Aa(a+b);\ k_i = 2r_e/1836\pi = 9.78 \times 10^{-17}\ \text{cm} \tag{5}$$

In den angeschriebenen Gleichungen sind $x_e = x_e(\phi,t)$ bzw. $x_i = x_i(\phi,t)$ die vom Ringazimut ϕ und der Zeit t abhängigen radialen Auslenkungen des lokalen Elektronen- bzw. Ionenschwerpunktes aus der Gleichgewichtslage, ω_{ce} die mittlere Elektronenumlauffrequenz, a bzw. b der radiale bzw. axiale kleine Ring-Halbmesser, N_e bzw. N_i die gesamte Elektronen- bzw. Ionenzahl im Ring, Z die Ladungszahl der Ionen, R der mittlere große Ringradius, γ der rel. Faktor der Elektronen, A das Atomgewicht der Ionen und r_e der klassische Elektronenradius. Die Frequenz $\omega_{ce}(1-\nu_r)$ ist die Torkelfrequenz des Elektronenringes bei Abwesenheit von Ionen. Der zugeordnete Wert $n = 1-\nu_r^2$ wird nachfolgend als 'effektiver Feldindex' oder einfach als 'Feldindex' bezeichnet. Gemäß (3) wird für die Elektronen $d\phi/dt = \omega_{ce} = \text{const}$, für die Ionen $d\phi/dt = 0$ vorausgesetzt. Der Einfachheit halber wurde in (1) bis (5) die gleiche Größe a verwendet, was im Rahmen des benützten Ringmodells hinreichend zutrifft. Zur Vereinfachung werden folgende normierte Größen eingeführt:

$$u(\phi,\tau) = x_e(\phi,t)/a \tag{6}$$

$$v(\phi,\tau) = x_i(\phi,t)/a \tag{7}$$

$$\tau = \omega_{ce}\cdot t \tag{8}$$

$u = 1$ bzw. $v = 1$ entspricht somit einer Auslenkung um a, $\tau = 2\pi$ der Zeit für einen vollen Elektronenumlauf.

Mit (6,7,8) erhält man anstelle von (1) und (2) nach Division durch $a\omega_{ce}^2$:

$$\ddot{u} + \nu_r^2 u + Q_1^2(u-v)/(1+(u-v)^2) = 0 \tag{9}$$

$$\ddot{v} \qquad - Q_i^2(u-v)/(1+(u-v)^2) = 0 \tag{10}$$

wobei

$$(\dot{\ }) = d/d\tau = \begin{cases} \partial/\partial\tau + \partial/\partial\phi & \text{bei Anwendung auf u} \quad (11) \\ \partial/\partial\tau & \text{bei Anwendung auf v} \quad (12) \end{cases}$$

Die nichtlinearen Gleichungen (9,10) wurden mit zwei verschiedenen Methoden gelöst. Die erste Methode basiert auf einer Fourierentwicklung von u und v mit zeitabhängigen Koeffizienten. Die Gleichungen (9,10) werden dabei in ein Differentialgleichungssystem für diese Koeffizienten umgewandelt. Dieses System kann durch Anwendung vorprogrammierter Integrationsroutinen numerisch nach τ integriert werden. Die zweite Methode basiert auf einem Predictor-Corrector-Verfahren, mit dem die Gleichungen (9,10) direkt, d.h. ohne vorherige Umformung integriert werden können.

Die Ergebnisse beider Methoden wurden in einigen Fällen miteinander vergleichen, wobei sich eine befriedigende Übereinstimmung ergab. Da die erste Methode wegen der bei jedem Rechenschritt notwendigen Fourier-Zerlegung die längeren Rechenzeiten ergab, wurden die hernach gezeigten Auswertungsergebnisse nach der zweiten Methode berechnet. Die erste Methode wird der Vollständigkeit halber im Anhang 1 skizziert. Die zweite für die Auswertungen benützte Methode wird im Anhang 2 beschrieben.

3. Diskussion von Auswertungsergebnissen

Ergebnisse der numersichen Auswertung von (9,10) bzw. (33,34) sind in Fig.3 bis Fig.29 für verschiedene Parameterkombinationen dargestellt. Fig.2 zeigt den Bezug dieser Parameterkombinationen zum Instabilitätsdiagramm /5/ der linearen Elektronen-Ionen Resonanz. Die in Kreisen angegebenen Zahlen verweisen auf die Nummer der betreffenden nachfolgenden Figur, in der das betreffende Auswertungsergebnis dargestellt ist.

Die Darstellung der numerisch berechneten normierten Schwerpunktauslenkungen $u(\phi,\tau)$ bzw. $v(\phi,\tau)$ für die Elektronen bzw. Ionen wurde auf die Wiedergabe von $u(0,\tau)$ und $v(0,\tau)$ beschränkt, was der Betrachtung der Elektronen-Ionen Schwingungen bei festem Azimut entspricht. Diese Einschränkung bedeutet keinen wesentlichen Informationsverlust, da u und v bei gegebenem festen τ nur mehr oder weniger sinusförmige Kurven sind, ähnlich wie in Fig.1 skizziert. Da diese Kurven sich bei Änderung von τ in azi-

mutaler Richtung verschieben, im übrigen aber ihre Gestalt in der für einen Elektronenumlauf benötigten Zeit nur wenig ändern, wird ihre zeitabhängige Form und Phasenlage auch in der gewählten nur zeitaufgelösten Darstellung genügend sichtbar. Als Abszisse ist die Zeit durch Angabe der Elektronenumläufe, (wobei $\tau = 2\pi$ mal Zahl der Umläufe, $t = \omega_{ce} \cdot \tau$) auf der Ordinate sind die gemäß (6,7) normierten Schwerpunktauslenkungen $u(0,\tau)$ (ausgezogene Kurven) und $v(0,\tau)$ (gestrichelte Kurven) aufgetragen. Von den eingetragenen Parametern bezeichnen X bzw. Y die zugehörigen Abszissen- bzw. Ordinatenwerte im Instabilitätsdiagramm Fig.2, N(=n) bezeichnet den Feldindex und A_o den Startwert $u(0,0)$ bzw. die gemäß (6) normierte anfängliche kollektive Maximalauslenkung der Elektronen. Bei Fällen mit zeitabhängigen Parametern (ab Fig.22) beziehen sich X bis A_o auf den Anfangszeitpunkt $\tau = 0$. In diesen Fällen erscheint die betreffende Fig.Nr. in Fig.2 jeweils zweimal; einmal mit dem Index a (= Anfang des Übergangs) und dem Index e (= Ende). Der Übergang ist strichpunktiert eingezeichnet. Die Beschriftung "Nichtlineare Kopplung" bzw. "Lineare Kopplung" bezieht sich auf die Wechselwirkungsterme in (9,10). Im ersten Fall wird, wie in (9,10) angegeben, für den Kopplungsterm der nichtlineare Ausdruck $(u-v)/(1+(u-v)^2)$ im zweiten Fall nur der lineare Ausdruck u-v verwendet.

Nachfolgend werden die verschiedenen Abbildungen, soweit erforderlich, genauer erläutert.

Fig.1 (im Text):

Begleittext in Abschnitt 6.

Fig.2:

Text am Anfang dieses Abschnitts.

Fig.3:

Zum Vergleich mit der linearen Theorie wurde die Wechselwirkungskraft hier linear angenommen und eine Parameterkombination gewählt, die der Mitte des Instabilitätsbereichs der linearen Elektronen-

Ionen Resonanz entspricht (vgl. Fig.2). Man erhält das erwartete instabile Anwachsen von $u(0,\tau)$ (Elektronen, ausgezogene Linie) und $v(0,\tau)$ (Ionen, gestrichelte Linie) aus der Anfangsstörung heraus. Wie man sieht, reagieren die anfangs kollektiv in Ruhe befindlichen Ionen relativ schnell auf die kohärente Störung der Elektronen. Bereits nach wenigen Kollektivschwingungen stellt sich annähernd die nach der Theorie zu erwartende 90°-Phasennacheilung der Ionenschwingung gegenüber der Elektronenschwingung ein.

Fig.4:

Der gleiche Fall (mit linearer Wechselwirkung) wie in Fig.3 ist hier für einen größeren Zeitraum dargestellt. Die 90°-Phasennacheilung der Ionen bleibt über den weiteren Verlauf der Schwingung ziemlich genau erhalten. Der rechte Teil der Figur, obgleich wegen der erreichten Amplitude praktisch unrealistisch, kann zum quantitativen Vergleich mit der linearen Theorie benützt werden.

Die Wellenlänge, die Anwachsrate und das Verhältnis der Ionen zur Elektronenamplitude muß hier der aus der linearen Theorie bekannten instabilen m = 1 Mode entsprechen. Für die instabile m = 1 Mode muß nach der linearen Theorie gelten:

$$u(0,\tau) = A_u \cdot \exp(\omega_i t)\cos(\omega_r t+\delta) \tag{13}$$

$$v(0,\tau) = A_v \cdot \exp(\omega_i t)\cos(\omega_r t+\delta-\frac{\pi}{2}) \tag{14}$$

mit konstanten Parametern A_u, ω_i, ω_r, δ und A_v; wobei $t = \tau/\omega_{ce}$. Dabei sind ω_r bzw. ω_i der Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Schwingungsfrequenz (näheres vgl. /5/).

Aus der linearen Theorie ergibt sich für die Mitte des Instabilitätsbereichs außerdem /7/:

$$A_v/A_u = 1/(2\omega_i/\omega_r) \tag{15}$$

Die Bedingungen für ω_i und ω_r sind dabei aus Fig.2 zu entnehmen.

Für die Berechnung der theoretischen Werte entnimmt man aus den Parameterangaben in Fig.4:

$$X = 1, Y = 0.1,\ n = 0.03\ (\text{d.h. } \nu_r = 0.98489) \tag{16}$$

Dazu liest man aus Fig.2 für den Punkt X,Y ab:

$$\omega_r = 0.98 \cdot \omega_{ce}(1-\nu_r) \tag{17}$$

$$\omega_i = 0.156 \cdot \omega_r \tag{18}$$

Es sei N_h die Zahl der Elektronenumläufe pro Halbwelle, τ_h bzw. t_h die zugehörigen Zeitintervalle (d.h. $\omega_r t_h = \pi$). Wegen $t_h = \tau_h/\omega_{ce}$, $\tau_h = 2\pi N_h$ (vgl.(9) und Folgetext) erhält man aus $\omega_r t_h = \pi$

$$N_h = 1/(0.98(1-\nu_r)\cdot 2) = 33.8 \quad (33.4) \tag{19}$$

Der aus dem Kurvenverlauf in Fig.4 direkt ermittelte Vergleichswert ist in (19,20,21) in Klammern beigefügt. Für den Faktor der Amplitudenzunahme während N_h Elektronenumläufen erhält man:

$$\exp(0.156 \times 0.98 \times (1-\nu_r) \times 2\pi \times N_h) = 1.60 \begin{matrix} (\text{Elektr.: } 1.62) \\ (\text{Ionen: } 1.64) \end{matrix} \tag{20}$$

und für das Verhältnis (15) der Ionenamplitude zur Elektronenamplitude erhält man mit (17)

$$A_v/A_u = 1/(2 \times 0.156) = 3.21 \quad (3.20) \tag{21}$$

Die Ergebnisse (19) bis (21) zeigen, daß zwischen den aus der linearen Theorie erhaltenen Werten und dem numerischen Resultat innerhalb der Ablsesgenauigkeit gute Übereinstimmung besteht.

Fig.5:

Hier ist der gleiche Fall wie in Fig.4 über einem größeren Zeitbereich dargestellt, jedoch mit nichtlinearer Wechselwirkung. Dieser Fall ist als Beispiel auch in /3/ abgebildet. Durch Vergleich mit Fig.4 erkennt man die durch nichtlineare Effekte be-

wirkte Begrenzung der Amplituden, sobald diese die Größenordnung der kleinen radialen Ringhalbachse erreichen. Man sieht aus Fig.5, daß etwa vom 120.ten Elektronenumlauf an die vorher bereits bestehende 90°-Phasennacheilung der Ionen gegenüber den Elektronen allmählich in eine 180°-Phasennacheilung übergeht, wobei gleichzeitig das Amplitudenmaximum erreicht wird. Der relative Phasenunterschied vergrößert sich anschließend weiter bis auf 270°, was einer 90°-Phasenvoreilung der Ionen entspricht. Gleichzeitig erfolgt eine Abnahme der Schwingungsamplituden. Nach insgesamt etwa 350 Elektronenumläufen erhält man annähernd die Startbedingungen, und der beschriebene Vorgang wiederholt sich mit geringen Modifikationen erneut. Das resultierende Schwebungsphänomen kann in gewisser Hinsicht auch folgendermaßen von der linearen Theorie her betrachtet werden. Bei kleinen Amplituden wächst zunächst die instabile m = 1 Mode aus dem Gemisch der übrigen Moden heraus und dominiert. Charakteristisch für diese Mode ist die erwähnte 90°-Phasennacheilung der Ionen. Die nach der einfachen linearen Theorie ebenfalls mögliche gedämpfte Mode mit 90°-Phasenvoreilung der Ionen (sie entspricht der konjugiert komplexen Lösung der Dispersionsgleichung) tritt zunächst nicht in Erscheinung. Beim Erreichen höherer Kollektivschwingungsamplituden bzw., wenn nichtlineare Effekte sprübar werden (d.h. wenn die Bedingung $(u-v)^2 \ll 1$ nicht mehr ausreichend zutrifft), erniedrigen sich in (9,10) die für die Kollektivschwingungsdauer der Elektronen und Ionen maßgebenden 'Effektivwerte' von $Q_1^2/(1+(u-v))^2$ und $Q_i^2/(1+(u+v)^2)$. Als Folge davon nimmt bei höheren Amplituden die Kollektivschwingungsdauer der Elektronen und hauptsächlich der Ionen zu. Diese Zunahme ist im experimentell relevanten Parameterbereich für Ionen größer als für Elektronen, da für letztere der konstant vorausgesetzte Wert von ν_r für die Schwingungsdauer mitbestimmend ist, sobald $1 - \nu_r \geq Q_1^2/2\nu_r$. Das hat die erwähnte Vergrößerung des Phasenwinkels zwischen der kohärenten Ionenschwingung und der kohärenten Elektronenschwingung zur Folge. Die ursprünglich instabile Mode wird dadurch allmählich in die gedämpfte Mode umgewandelt, was wieder zur Abnahme der Schwingungsamplituden führt. Da nach der Rückkehr zu kleinen Amplituden die Phasenrelation nicht exakt der gedämpften Mode entspricht und stets auch noch eine gewisse Rest-Nichtlinearität zur Neubildung

von Anteilen der instabilen Schwingungsmode beiträgt, wiederholt sich der beschriebene Vorgang mit etwas anderen Anfangsbedingungen erneut, usw.

Fig.6:

Der Vergleich von Fig.6 mit Fig.5 zeigt den Einfluß der Anfangsstörung. Bei sonst gleichen Parametern wurde A_o in Fig.6 nur halb so groß gewählt wie in Fig.5. Man sieht, daß im wesentlichen das gleiche Schwebungsbild wie in Fig.5 entsteht, jedoch mit etwas verlängerten Schwebungsperioden. Die erreichten Maximalamplituden sind etwa die gleichen wie in Fig.5. Es fällt auch auf, daß die Elektronenamplitude im Schwebungsminimum ziemlich genau wieder auf das Maß der Anfangsstörung zurückfällt, wie dies auch bei Fig.5 der Fall war. Die Zahl N_2 der Elektronenumläufe, um die sich die Schwebungsperiode in Fig.6 gegenüber Fig.5 vergrößert hat, läßt sich zum Vergleich abschätzen. Sie muß wegen der kleineren Anfangsstörung etwa der Zeit entsprechen, die benötigt wird, damit sich die Amplitude (im linearen Regime) um 2mal den Faktor 2 ändert. Aus (20) erhält man (indem man dort sinngemäß N_h durch N_2 und 1.60 durch 4 ersetzt):

$$N_2 = \ln 4/(0.156\times 0.98\times(1-\nu_r)\times 2\pi) = 96 \quad (101) \qquad (22)$$

In Klammern steht der aus Fig.5 und 6 direkt erhaltene Wert. Die Dauer der Schwebungsperiode ist daher u.a. ziemlich eindeutig durch die Größe der Anfangsstörung mit determiniert.

Fig.7:

Der Vergleich mit Fig.5 zeigt den Einfluß des Feldindex. Bei sonst unveränderten Parametern wurde der Feldindex hier halb so groß wie in Fig.5 gewählt. Die Kollektivschwingungsdauer ist hier, wie zu erwarten, doppelt so groß wie in Fig.5. Wie man sich überzeugt, ist auch die Zeit bis zum Erreichen des Schwebungsmaximums ziemlich genau doppelt so groß, d.h. die benötigte Zahl von Kollektivschwingungen bis zum Erreichen des Schwebungsmaximums hängt, wenigstens im gezeigten Fall, nur wenig vom Feldindex ab. Wie man sich weiter überzeugt, gilt dasselbe offenbar auch für die Größe des Schwebungsmaximums.

Fig.8:

Die Parameter wurden wie in Fig.4 gewählt, mit Ausnahme von X, das in den stabilen Bereich nahe der linken Grenze des Instabilitätsgebietes verlegt wurde (vgl. Fig.2). Die Kopplung ist linear, wie in Fig.4. Man sieht, daß wegen des dicht benachbarten Instabilitätsgebietes bereits eine große Empfindlichkeit gegen Anfangsstörungen besteht. Die Schwingungen wachsen aber nicht exponentiell an, wie in Fig.4. Es werden statt dessen Schwebungen angeregt mit einer dem nichtlinearen Fall der Fig.5 sehr ähnlichen Relation zwischen Amplituden und Phasen. Das könnte bedeuten, daß man die nichtlinearen Schwingungen eventuell in guter Näherung als lineare Schwingungen mit gegenüber Q_1 und Q_i verkleinerten Effektivwerten von Q_1 und Q_i auffassen kann, was bei Fig.5 bereits angedeutet wurde und durch nachfolgende Ergebnisse ebenfalls nahegelegt wird (vgl. Test zu Fig.11).

Fig.9:

Gleicher Fall wie Fig.8, jedoch mit nichtlinearer Kopplung. Der Unterschied zu Fig.8 ist, wie zu erwarten, ziemlich gering, da die Maximalamplituden auch im linearen Fall (Fig.8) nicht besonders groß sind (und damit in (9,10) die Bedingung $(u-v)^2 \ll 1$ für lineares Verhalten noch relativ gut erfüllt ist. Dies gilt (bei genügend kleiner Anfangsstörung!) im stabilen Gebiet der Fig.2 generell, besonders in größerer Entfernung vom Rand des Instabilitätsgebietes.

Fig.10:

Zum Vergleich mit Fig.4 bzw. Fig.8. Alle Parameter mit Ausnahme von X stimmen mit den entsprechenden Parametern der genannten Figuren überein. Der Wert von X entspricht jetzt im Gegensatz zu Fig.8 einem Punkt auf der anderen Seite des linearen Instabilitätsgebietes in Fig.2. Die Schwingungen sind wieder stabil, wie zu erwarten. Die mittlere Phasenverschiebung zwischen der kollektiven Ionen- und Elektronenschwingung liegt schon nahe bei 0° wie jedenfalls im linearen Fall für $X \gg 1$ zu erwarten.

Fig.11:

Gleicher Fall wie Fig.10, jedoch mit nichtlinearer Kopplung. Anders als im entsprechenden Punkt auf der linken Seite des Instabilitätsgebietes (vgl.Fig.8,9) ist hier der Unterschied zwischen nichtlinearer und linearer Kopplung erheblich. Im nichtlinearen Fall erhält man im dargestellten Zeitbereich instabil anwachsende Schwingungen, obwohl der Punkt X,Y bereits im linear stabilen Gebiet liegt. Das Anwachsen der Schwingungen im nichtlinearen Fall kann hier damit erklärt werden, daß der nichtlineare Wechselwirkungsterm $Q_i^2(u-v)/(1+(u-v)^2)$ in Gl.10 in erster Näherung wie ein linearer Wechelwirkungsterm $Q_{ieff}^2(u-v)$ mit $Q_{ieff} = \text{const} \leq Q_i$ aufgefaßt werden kann (ähnliches gilt für Q_1). Wenn Q_i, wie im hier gewählten Bespiel, einer X-Position knapp rechts vom rechten Rand des Instabilitätsgebietes der Fig.2 entspricht, kann somit $X_{eff} = Q_{ieff}/(1-\nu_r)$ noch im Instabilitätsgebiet liegen. Da Q_{ieff}, und damit auch X_{eff}, bei wachsenden Schwingungsamplituden weiter abnimmt ($X_{eff} \leq X$), setzt instabiles Verhalten ein und verstärkt sich anfänglich sogar, sobald die Anfangsamplituden in einem solchen Fall einen bestimmten Schwellenwert überschreiten (im hier gewählten Beispiel wird dieser Schwellenwert offensichtlich bereits bei A_o=0.1 überschritten). Wegen $X_{eff} \leq X$ erklärt dies auch, warum am linken Rand des Instabilitätsgebietes kein derartiger Effekt auftritt. Die Tatsache, daß bei endlichen Schwingungsamplituden $X_{eff} < X$ gilt, kann möglicherweise zu einer effektiven Verbreiterung der rechten Hälfte des Instabilitätsgebietes führen, wenn dieses beim Übergang von der Kompression zum spill-out genügend langsam von links nach rechts durchlaufen wird. Der beschriebene Mechanismus könnte dabei ein 'Hängenbleiben' in einem (nichtlinear begrenzten) instabilen Schwingungszustand bewirken, was zur Folge hätte, daß die Schwingungsamplituden auch nach dem Überschreiten der rechten Grenze des linearen Instabilitätsgebietes der Fig.2 relativ große Werte beibehalten oder sogar weiter zunehmen. Bei Fällen mit zeitabhängigen Parametern wurde dieser Effekt in der Tat beobachtet (vgl.ab Fig.22).

Fig.12, 13:

Im Vergleich zu Fig.8,9 befindet sich der Punkt X,Y in Fig.2 jetzt noch weiter links vom Instabilitätsgebiet. Wie schon bei Fig.8,9 festgestellt wurde, und auch hier zu erwarten ist, besteht auf Grund der kleinen Maximalauslenkung praktisch kein Unterschied zwischen linearer und nichtlinearer Kopplung. Das Schwingungsbild kann von der linearen Theorie her verstanden werden. Das relativ gleichmäßige Schwingungsbild der Elektronen entsteht dadurch, daß letztere hauptsächlich an das Magnetfeld gebunden sind und von den Ionen nur relativ wenig beeinflußt werden. Das Umgekehrte ist für die Ionen der Fall. Ihre Bewegung wird ausschließlich durch die von den Elektronen verursachte Potentialmulde und deren Bewegung beeinflußt. Das Schwingungsbild der Ionen entsteht demnach weitgehend durch lineare Superposition eines von der kollektiven Elektronenbewegung erzwungenen Anteils, der annähernd mit der ungestörten Kollektivfrequenz $1-\nu_r$ der Elektronen schwingt und eines freien Anteils, der annähernd mit der Frequenz Q_i der Ionen im kollektiv ungestörten Elektronenring oszilliert. Da für das Verhältnis $Q_i/(1-\nu_r)$ im vorliegenden Fall die einfache rationale Zahl 1/2 gewählt wurde, ist das Schwingungsbild der Ionen angenähert periodisch. Abweichungen von der exakten Periodizität beruhen hauptsächlich auf der nicht vollständig verschwindenden Rückwirkung der Ionen auf die Elektronen. Wie man sich durch Vergleich von Fig.15 mit Fig. 16 überzeugt, beeinflussen nichtlineare Effekte diese Abweichungen im vorliegenden Fall nur wenig. Die Phasenlage und das Amplitudenverhältnis des erzwungenen Anteils der Ionenschwingung zur 'treibenden' Elektronenschwingung entspricht dem bei Koppelschwingungen zu erwartenden Ergebnis. Da die treibende Frequenz $1-\nu_r$ im vorliegenden Fall relativ weit oberhalb der Resonanzfrequenz Q_i des 'angetriebenen' Ionen-Oszillators liegt, ist die Phasenverschiebung schon annähernd 180° und das Amplitudenverhältnis (Ionen zu Elektronen) im Vergleich zum Resonanzfall (Fig.4,5) bereits umgekehrt (im Grenzfall $Q_i/(1-\nu_r)\to 0$ würde man genau 180° als Phasenverschiebung und 0 für das Amplitudenverhältnis erhalten.

Fig.14, 15:

Im Vergleich zu Fig.10,11 befindet sich der Punkt X,Y in Fig.2 jetzt noch weiter rechts vom Instabilitätsgebiet. Der bei Fig.11 erwähnte Schwellenwert wird bei Fig.15 nicht mehr erreicht. Als Folge davon besteht zwischen linearer und nichtlinearer Kopplung jetzt die zu erwartende weitgehende Übereinstimmung, ebenso wie dies auf der entsprechenden anderen Seite des Instabilitätsgebietes (Fig.12,13) der Fall ist. Das Schwingungsbild ist analog der zu Fig.12,13 gegebenen Erklärung von der linearen Theorie her erklärbar. Aus dem dort genannten Grund verläuft die Elektronenschwingung weitgehend ungestört, und die Ionenschwingung besteht im wesentlichen wieder aus einem 'erzwungenen' und einem 'freien' Anteil. Während in Fig.12,13 der erzwungene Anteil mit der größeren Frequenz oszilliert, schwingt dieser Anteil hier mit der kleineren Frequenz. Obwohl hier wie dort das Verhältnis $Q_i/(1-\nu_r)$ eine einfache rationale Zahl ist, scheint der Einfluß der Ionenrückwirkung hier etwas stärker zu sein, da die Periodizität der Ionenschwingung hier weniger gut angenähert ist als in Fig.12,13. Die Phasenverschiebung des erzwungenen Anteils der Ionenschwingung gegen die 'treibende' Elektronenschwingung liegt schon sehr nahe bei 0°, da die treibende Frequenz $(1-\nu_r)$ hier relativ weit unterhalb der Resonanzfrequenz Q_i des angetriebenen (Ionen-) Oszillators liegt. Das Amplitudenverhältnis (Ionen zu Elektronen) ist bereits erheblich kleiner als im Resonanzfall (vgl.Fig.4,5; im Grenzfall $Q_i/(1-\nu_r)\to\infty$ würde man hier 0° für die Phasenverschiebung und 1 für das Amplitudenverhältnis erhalten).

Fig.16:

Der Punkt X,Y in Fig.2 befindet sich jetzt noch weiter rechts vom Instabilitätsgebiet als in Fig.14,15 und $Q_i/(1-\nu_r)$ ist hier kein einfaches Zahlenverhältnis. Es wird nur der nichtlineare Fall gezeigt, da er sich vom linearen Fall aus den zu Fig.8,9,12,13 genannten Gründen nur wenig vom linearen Fall unterscheidet. Aus den zu Fig.12 bis 15 genannten Gründen erhält man jetzt ein stärker von der Periodizität abweichendes Schwingungsbild der Ionen, eine Phasenverschiebung des erzwungenen Anteils der Ionenschwingung gegenüber der Elektronenschwingung von nahezu 0° und ein entsprechendes Amplitudenverhältnis von nahezu gleich 1.

Fig 17:

Zum Vergleich mit Fig.5. Gegenüber Fig.5 wurde hier lediglich der Parameter für die Ionenbeladung verkleinert (Y = 0.01 statt 0.1). Die Maximalamplituden sind hier erwartungsgemäß geringer als in Fig.5, da die nichtlinearen Effekte gegenüber der verkleinerten linearen Anstiegsrate bereits bei kleineren Amplituden dominant werden. Die Schwebungsperiode und die Zahl der Kollektivschwingungen pro Schwebungsperiode ist hier größer als in Fig.5, weil wegen der geringeren linearen Anstiegsrate (trotz geringerer Maximalamplituden) mehr Zeit bis zum Erreichen der Maximalausschläge und für den anschließenden Abfall der Amplituden benötigt wird.

Fig.18:

Ausgehend von Fig.15 wurde hier der Parameter Y für die Ionenbeladung von 0.1 auf 0.3 vergrößert. Die beim Übergang von Fig.17 nach Fig.5 sichtbare Tendenz setzt sich hier fort. Die Maximalamplituden sind größer, und die Schwebungsperiode ist kürzer als in Fig.5. Das Schwingungsbild der Elektronen zeigt jetzt starke Schwebungen, da die erhöhte Ionenrückwirkung auf die Elektronen hier nicht mehr als klein gegen die Bindung der Elektronen an das Magnetfeld betrachtet werden kann.

Fig.19:

Der Parameter X wurde gegenüber Fig.18 auf 1.75 vergrößert. Der Vergleich mit Fig.18 zeigt eine Zunahme der Maximalamplituden, obwohl beim Übergang von Fig.18 nach Fig.19 die lineare Instabilität gemäß Fig.2 schwächer wird. Der Effekt kann ähnlich wie bei Fig.11 mit $X_{eff} < X$ erklärt werden.

Fig.20:

Da die linearen Anstiegsraten mit Y zunehmen, sind wegen $X_{eff} < X$ (vgl. Beschreibung zu Fig.11 und Fig.19) die größten Maximalamplituden in der Umgebung des rechten Randes des linearen Instabilitätsgebietes der Fig.1 für große Y-Werte zu erwarten. Wie Fig. 20 dazu zeigt, ergibt sich z.B. bei Y = 0.35 (und X = 1.75) eine fast explosiv einsetzende Instabilität, die einen Verlust der

Ionen andeutet. Dieser Fall ist auch in /9/ abgebildet. Einige Zeit nach dem Einsetzen der Instabilität führt die große Entfernung zwischen Ionen und Elektronen praktisch zum Verschwinden der nichtlinearen Wechelwirkung. Man erkennt dies daran, daß die von der Instabilität angestoßenen starken kollektiven Betatronschwingungen der Elektronen anschließend nahezu gleichförmig harmonisch verlaufen.

Fig.21:

Zum Vergleich mit einem in /4/ angegebenen Berechnungsbeispiel. Die radiale Fokussierung des Magnetfeldes ist hier gleich Null gesetzt ($\nu_r = 0$). Die Werte von $Q_1 = Q_i = 0.355$ und $n = 1$ entsprechen dem in /4/ gezeigten Beipiel. Die zu Fig.21 gehörende X,Y Position kann wegen $\nu_r = 0$ in Fig.2 nicht direkt angegeben werden. Das in /4/ gezeigte Ergebnis und Fig.21 sind einander sehr ähnlich, obwohl sich beide Fälle bezüglich der Annahmen über die Wechselwirkungskraft und die Anfangsbedingungen voneinander unterscheiden.

Fig.22, 23, 24:

Hier wurde angenommen, daß X und n sich linear mit der Zeit ändern und dabei den in Fig.2 eingezeichneten Durchgang durch das Instabilitätsgebiet erzeugen. In Fig.2 und im folgenden Text bedeutet der Index a den Anfang und der Index e das Ende eines solchen Übergangs. Die ab Fig.22 vom Plotter eingeschriebenen Daten beziehen sich auf den Anfang. Die zwei kleinen Pfeile senkrecht auf der Abszisse bezeichnen die Ein- bzw. Austrittszeit in den bzw. aus dem linearen Instabilitätsbereich. Die gewählte Feldindexänderung ist $n_e - n_a = -1.95 \times 10^{-2}$ (was $Q_{1a} = Q_{1e}$, $Q_{ia} = Q_{ie}$ ergibt). Die drei Fälle unterscheiden sich nur durch die Zeitdauer des Übergangs. In Fig.22 erfolgt der Übergang in der Zeit von 650 Elektronenumläufen, in Fig.23 bzw. Fig.24 wurde die Übergangszeit um den Faktor 2 bzw. 4 größer angenommen (im Experiment erfolgt der Übergang im allgemeinen langsamer als in Fig.24). In den drei Fällen hängt die erreichte Endamplitude offenbar nur wenig von der Übergangszeit ab, und die Ionenamplituden nehmen mit der Zeit fast monoton zu. An Fig.23,24 fällt auf, daß im Gegensatz zu den für konstante Parameter erhaltenen Ergebnissen die Phasenver-

schiebung zwischen der kollektiven Elektronen- und Ionenschwingung im linearen Instabilitätgebiet (zwischen den beiden Pfeilen auf der Abszisse) und sogar auch noch rechts davon ziemlich genau bei 180° liegt. Bei konstanten Parametern lag dagegen die Phasenverschiebung im Instabilitätsgebiet (wenigstens im Zeitmittel) bei 90° und rechts vom Instabilitätsgebiet nahe bei 0° (vgl.Fig. 5,6 und 14,15,16). Ferner steigt insbesondere die Ionenamplitude auch nach dem Verlassen des Instabilitätsgebietes (zweiter Pfeil auf der Abszisse) weiterhin an.

Die 180°-Stabilisierung im Instabilitätsgebiet kann eventuell dadurch erklärt werden, daß durch das instabile bzw. adiabatische Anwachsen der Amplituden (adiabatisch wegen der zeitlich abfallenden Kollektivfrequenz der Elektronen) die Ionenfrequenz auf Grund der nichtlinearen Kopplung zunächst zeitlich noch schneller abfällt als die Kollektivfrequenz der Elektronen. Dadurch wird die anfängliche 90°-Phasennacheilung der Ionen nach wenigen Kollektivschwingungen auf etwa 180° vergrößert. Bei 180° kann jedoch aus den zu Fig.5 genannten Gründen bzw. wegen der zeitlichen Symmetrie kein weiteres Anwachsen der Ionenamplituden und demgemäß auch keine nichtlineare Frequenzänderung der Ionen stattfinden. Dies hat zur Folge, daß jetzt der Frequenzabfall der Elektronen überwiegt und somit eine Gegentendenz erzeugt wird, welche die Phasennacheilung der Ionen wieder zu vermindern versucht. Als Folge beider einander entgegenwirkenden Tendenzen entsteht die beobachtete Phasenstabilisierung nahe bei 180° und das nicht exponentielle Anwachsen der Amplituden.

Daß die Ionenamplituden nach dem Verlassen des Instabilitätsgebietes weiterhin anwachsen, ist z.T. wegen der mehr oder weniger adiabatisch bedingten Amplitudenzunahme und wegen des Fehlens energieverzehrender Dämpfungsmechanismen verständlich[1]. Auch das zu Fig.11 erwähnte 'Hängenbleiben' im Instabilitätsbereich dürfte teilweise wirksam sein. Die 180°-Stabilisierung rechts vom Instabilitätsgebiet der Fig.2 ist in gewisser Hinsicht ähnlich wie bisher erklärbar: Bei einer Phasennacheilung der Ionen gegenüber der

1 Wegen der nichtlinearen Amplitudenbegrenzung kann die Bezeichnung 'adiabatisch' hier natürlich nur mit Vorbehalt benützt werden.

kollektiven Elektronenbewegung von weniger als 180° erfolgt über die kollektive Elektronenbewegung Energieeinkopplung in die Ionenschwingung und als Folge davon der Reihe nach eine Amplitudenzunahme, eine nichtlinear bedingte Frequenzverminderung und damit eine Erhöhung der Phasennacheilung der Ionen. Bei mehr als 180° Phasennacheilung erfolgt Energieauskopplung aus der Ionenschwingung und als Folge davon eine Amplitudenabnahme usw., d.h. wiederum eine Korrektur der Phasennacheilung auf 180° hin.

Fig.25, 26:

Hier ändern sich X,Y und n linear mit der Zeit zwischen den Anfangswerten $X_a = 0.23$, $Y_a = 0.028$, $n_a = 0.06$ und den Endwerten $X_e = 3.1$, $Y_e = 0.12$, $n_e = 0.03$. Die zwei Fälle unterscheiden sich nur durch die Übergangszeit zwischen den Anfangs- und Endwerten. Die Anfangs- und Endwerte von X und Y entsprechen dem in /8/, Abb.19 angenommenen Übergang. Da der Übergang in den oben genannten Parametern hier linear vorausgesetzt wurde, entsteht im logarithmischen Maßstab die eingezeichnete etwas gekrümmte Übergangskurve. Wie (durch hier nicht gezeigte) Vergleichsrechnungen festgestellt wurde, scheint der spezielle Verlauf dieser Kurve (bei unveränderten Anfangs- und Endwerten) die erreichten Endamplituden nur unwesentlich zu beeinflussen, wenigstens für experimentell relevante Übergangszeiten (mehrere tausend Elektronenumläufe). Das Gleiche gilt, wie man durch Vergleich von Fig.25 mit Fig.20 sieht, auch für die Abhängigkeit von der Übergangszeit (bei großen Übergangszeiten). Die Hüllkurve der Schwingungen wird bei wachsender Übergangszeit zunehmend gleichmäßiger. Wenn der Übergang genügend langsam erfolgt, besteht in jedem Zeitintervall ein nahezu 'quasistationärer' Schwingungszustand, der fast nur von den Momentanwerten der Parameter und kaum mehr von deren Vorgeschichte abhängt (vgl.auch Text zu Fig.28 und 29).

Fig.27:

Zum Vergleich mit Fig.25. Gegenüber Fig.25 wurde nur die Anfangsamplitude auf $A_o = 0.01$ verkleinert. Wie man sieht, wird die Hüllkurve bei Verminderung der Anfangsamplitude A_o ungleichmäßiger.

Dieser Effekt hängt vermutlich damit zusammen, daß bei sehr kleinen Anfangsamplituden und nach dem Überschreiten der linken Grenze des linearen Instabilitätsgebietes der Fig.2 die nichtlineare Amplitudenbegrenzung nicht sofort spürbar wird. Es vergeht ein endliches Zeitintervall, bis Amplituden entsprechender Größe erreicht werden. In dieser Zeit werden jedoch andernteils Punkte auf der Übergangskurve erreicht, für welche die lineare Anwachsrate bereits deutlich über Null angestiegen ist. Das dadurch bewirkte verzögerte, aber umso heftigere momentane Anwachsen der Schwingungen kann dann zu einem 'Überschwingen' führen, ähnlich wie es in Verbindung mit Fig.5 beschrieben wurde.

Fig.28, 29:

Hier wurde bei dem in Fig.5 gezeigten Übergang die zeitliche Änderung der Parameter einmal im Instabilitätsgebiet (Fig.28), das andere Mal rechts vom Instabilitätsgebiet (Fig.29) gestoppt bzw. 'eingefroren'. Der Stop-Zeitpunkt ist auf der Übergangskurve der Fig.2 und auf der Abszisse von Fig.28 und 29 durch Kreuze gekennzeichnet. Die nach dem Stop-Zeitpunkt sich einstellenden Schwebungen sind relativ schwach, besonders, wenn die Parameteränderung erst nach dem Durchlaufen des Instabilitätsgebietes abgestoppt wird. Hier nicht gezeigte Vergleichsrechnungen lassen ferner erkennen, daß die Modulationstiefe dieser Schwebungen, die man in gewisser Hinsicht als Maß für die noch vorhandene 'Nicht-Adiabasie'[1)] des Übergangs ansehen kann, bei Vergrößerung der Übergangszeit abnimmt. Dies scheint zu zeigen, daß die Hüllkurve der Ionenschwingungen (und auch der Elektronenschwingungen) bei extrem langsamen Übergängen sich der Hüllkurve stationärer schwebungsfreier Lösungen des Differentialgleichunssystems (9,10) annähert, die jeweils konstanten Parametersätzen für Punkte der Übergangskurve entsprechen.

Die Ergebnisse zeigen, daß es zu zeitlich konstanten Parametersätzen, die festen Punkten auf der Übergangskurve entsprechen, jeweils wenigstens eine stationäre bzw. schwebungsfreie Lösung von (8,9) zu geben scheint. Die langsame zeitliche Parameteränderung scheint unter hier offenbar zutreffenden Voraussetzungen weiterhin auch ein einfaches Mittel zu sein, um solche Lösungen aufzufinden.

4. Schlußbemerkung

Als besonders auffallendes Ergebnis aller mit dem (durch die Gleichungen (1,2) beschriebenen Ring-Modell durchgeführten Rechnungen hat sich gezeigt, daß auch bei nichtlinearer Begrenzung des instabilen Anwachsens der Elektronen-Ionen Schwingungen die erreichten kollektiven Ionenamplituden im allgemeinen größer sind als die Kollektivamplituden der Elektronen (ähnlich wie im linearen Fall). Dies gilt besonders auch für die vom Experiment her gesehen realistischeren Rechnungen mit zeitabhängigen Parametern (ab Fig.22). Beim Durchgang durch das experimentell relevante Instabilitätsgebiet der linearen radialen Elektronen-Ionen Dipolresonanz zeigte sich hier, daß ein nichtlinearer Phasenstabilisierungseffekt auch nach dem Verlassen des Instabilitätsgebietes (in Richtung $\nu_r \to 1$) zum weiteren Anwachsen der Amplituden führen kann. Die erhaltenen Ergebnisse müssen jedoch unter den in der Einleitung genannten Vorbehalten gegenüber dem benützten noch sehr einfachen Ring-Modell gesehen werden.

In Zusammenarbeit mit Herrn Dr. I. Hofmann wurde inzwischen mit der numerischen Untersuchung eines verfeinerten Ring-Modells begonnen. Im Vergleich mit dem hier beschriebenen Modell kommt das neue Modell der Wirklichkeit insofern näher, als es nicht nur einen azimutal lokalen Schwerpunkt jeweils für die Elektronen und Ionen enthält, sondern jeweils mehrere solcher Schwerpunkte. Über entsprechende Ergebnisse wird an anderer Stelle berichtet.

Für gute Zusammenarbeit und wertvolle Diskussionen im Zusammenhang mit der gemeinsamen Weiterführung dieser Arbeit in Richtung auf ein verfeinertes Ring-Modell danke ich Herrn Dr. Hofmann. Herrn Professor Schlüter danke ich dabei für wertvolle Anregungen, besonders auch auf dem Gebiet der Numerik. Für nützliche Diskussionen danke ich neben anderen Kollegen insbesondere auch Herrn Dr. Andelfinger und Herrn Dr. Merkel. Herrn Springmann danke ich für numerische Auswertungen und Herrn Birkmeier für Zeichenarbeiten.

5. Anhang 1

Für die erste Auswertungsmethode von (9,10) wird angesetzt:

$$u = Q_1 \sum_{n=0}^{N} \{a_n(\tau)e^{in(\phi-\tau)} + a_n^*(\tau)e^{-in(\phi-\tau)}\} \tag{23}$$

$$v = Q_i \sum_{n=0}^{N} \{b_n(\tau)e^{in\phi} + b_n^*(\tau)e^{-in\phi}\} \tag{24}$$

$$V = (1/2)\ln(1+(u-v)^2) \tag{25}$$

wobei (*) den konjugiert komplexen Wert bezeichnet. Mit dem durch (25) definierten normierten Wechselwirkungspotential V können die Wechselwirkungsterme in (9) bzw. (10) formal einfacher durch $Q_1^2 \partial V/\partial u$ bzw. $Q_i^2 \partial V/\partial v$ dargestellt werden. Setzt man (23,24) in (9,10) ein, dann erhält man nach Auswertung von (11,12), Multiplikation der entstehenden Gleichungen mit $\exp(-in(\phi-\tau))$ bzw. $\exp(-in\phi)$ und Integartion über ϕ von 0 bis 2π bei festgehaltenem τ das Gleichungssystem:

$$\ddot{a}_n + \nu_r^2 a_n + (Q_1/2\pi)\int_0^{2\pi} (\partial V/\partial u)e^{-in(\phi-\tau)}\partial\phi = 0 \tag{26}$$

$$\ddot{b}_n + (Q_i/2\pi)\int_0^{2\pi} (\partial V/\partial v)e^{-in\phi}\partial\phi = 0 \tag{27}$$

wobei

$n = 0, 1, 2, \ldots, N$ und

$$\begin{aligned} a_n(0) &= (1/2\pi Q_1)\int_0^{2\pi} u(\phi,0)e^{-in\phi}d\phi \\ \dot{a}_n(0) &= (1/2\pi Q_1)\int_0^{2\pi} \dot{u}(\phi,0)e^{-in\phi}d\phi \\ b_n(0) &= (1/2\pi Q_i)\int_0^{2\pi} v(\phi,0)e^{-in\phi}d\phi \\ \dot{b}_n(0) &= (1/2\pi Q_i)\int_0^{2\pi} \dot{v}(\phi,0)e^{-in\phi}d\phi \end{aligned} \tag{27a}$$

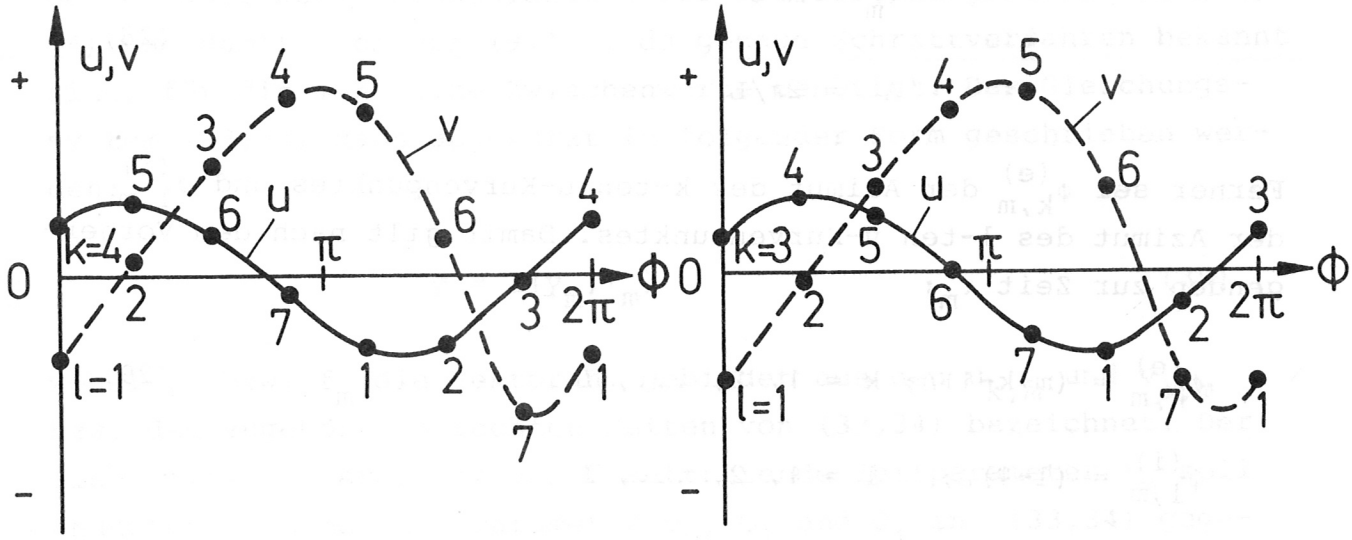
Die Funktionen $u(\phi,0)$ bis $\dot{u}(\phi,0)$ sind als Anfangs-Bedingungen vorzugeben. Real- und Imaginärteil der komplexen Fourier-Integrale können numerisch ermittelt werden. Damit erhält man nach Zerlegung von (26,27) in 4N reelle Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Real- und Imaginärteile von a_n und b_n, ein Differentialgleichungssystem, das mit bekannten Subroutinen numerisch nach τ integriert werden kann. Dies ergibt den Zeitverlauf von $a_n(\tau)$, $a_n^*(\tau)$, $b_n(\tau)$ und $b_n^*(\tau)$, woraus man alle übrigen interessierenden zeitabhängigen Größen, wie z.B. $u(\phi,\tau)$ und $v(\phi,\tau)$ berechnen kann, falls die Reihen (23,24) genügend konvergent sind.

6. Anhang 2

Bei der 2. Auswertungsmethode von (9,10) werden direkt die normierten radialen Auslenkungen $u(\emptyset,\tau)$ und $v(\emptyset,\tau)$ (die als stetige Funktionen von $\emptyset$ und τ behandelt werden) für äquidistante Werte von $\emptyset$ und τ im Bereich $0 \leq \emptyset \leq 2\pi$, $\tau \geq 0$ ermittelt.

Das Verfahren wird unter Zuhilfenahme von Fig.1 beschrieben. Fig. 1a zeigt den Ring-Zustand zur normierten Zeit $\tau = \tau_m = m\Delta\tau$, Fig. 1b den Folgezustand im nächstbenachbarten Zeitpunkt $\tau = \tau_{m+1} = (m+1)\cdot\Delta\tau$. Dabei ist $\Delta\tau$ der Integrations-Zeitschritt, und der ganzzahlige Index m zählt die zurückgelegten Zeitschritte. Der Ringzustand zu einem der Zeitpunkte τ_m wird dadurch beschrieben, daß man für äquidistante Werte von $\emptyset = (l-1)\Delta\emptyset$ die dazugehörenden Werte von u und v angibt (als Startbedingungen für einige $m \leq 0$) bzw. berechnet (für $m \geq 1$). Dabei ist $\Delta\phi = 2\pi/L$ der durch Wahl des ganzzahligen Wertes L vorzugebende Azimutschritt und l liegt im Bereich $1 \leq l \leq L$. Die Werte von $\Delta\tau$ und $\Delta\emptyset$ bleiben während der Rechnung konstant. Als Verfahrensgründen werden beide Schritte gleich groß angenommen, d.h. $\Delta\tau = \Delta\phi = \Delta = 2\pi/L$. Der Zeitschritt $\Delta\tau$ entspricht somit der Zeit, die die Elektronen zur Zurücklegung der Winkeldistanz $\Delta\phi$ benötigen. In Fig.1 ist der durch $u(\phi,\tau)$ und $v(\phi,\tau)$ gegebene Ringzustand für den Fall L = 7 in zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten $\tau = \tau_m, \tau_{m+1}$ dargestellt. Gerechnet wurde meist mit L = 32, um pro Zeitschritt eine ausreichend kleine Änderung der rechten Seiten von (9,10) zu gewährleisten. Bei Rechnungen mit zeitabhängigen Parametern (vgl. Abschnitt 3, ab Fig.22)

wurde L aus Gründen der Rechenzeitersparnis auf 16 reduziert (Genauigkeitsverlust in der Größenordnung von Prozent). Die Genauigkeit der Azimutabhängigkeit ist bei L = 32 bereits mehr als ausreichend, da sie einer Fourier-Entwicklung bis etwa zur 15. Harmonischen entspricht.



1a) Zustand zur Zeit $\tau = \tau_m$ 1b) Folgezustand für $\tau = \tau_{m+1}$

Fig.1: Zur Beschreibung des Ringzustandes

Die in Fig.1 an die Kurvenpunkte für u (ausgezogen) bzw. v (gestrichelt) angeschriebenen Zahlen sind die Indexbezeichnungen der betreffenden Kurvenpunkte. Die Indices für die Punkte von u sollen nachfolgend mit k und die Indices für v mit l bzeichnet werden, wobei $1 \leq k \leq L$, und $1 \leq l \leq L$. Im Zeitablauf soll den gleichen Teilchen stets der gleiche Index zugeordnet bleiben. Wie in Fig. 1a und 1b gezeichnet, verschiebt sich deshalb ein bestimmter Index k wegen der Azimutalbewegung im Zeitablauf für jeden Zeitschritt um einen Azimutschritt nach rechts, während ein bestimmter Index l stets dem gleichen Azimut ϕ zugeordnet bleibt. Dabei ändert sich, wie in Fig.1 angedeutet, im allgemeinen auch der Ringzustand, die ϕ-Abhängigkeit von u und v. Für $\tau = 0$ werden die Punktmuster für u und v kongruent bezüglich ϕ angenommen. Wegen $\Delta\tau = \Delta\phi$ besteht Kongruenz dann auch für die übrigen Zeitpunkte τ_m.

Soweit nötig, sind Indices nachfolgend gemäß $0 \rightarrow L$, $L + 1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow L - 1$, usw. auf ihren Definitionsbereich rückübertragen zu denken, ohne daß dies extra angegeben wird. Gemäß dem Vorhergehenden sei (m ganzzahlig):

$$\tau_m = m \cdot \Delta$$
$$\Delta = 2\pi/L \tag{28}$$

Ferner sei $\phi^{(e)}_{k,m}$ der Azimut des k-ten u-Kurvenpunktes und $\phi^{(i)}_{l,m}$ der Azimut des l-ten v-Kurvenpunktes. Damit gilt nach dem Vorhergenden zur Zeit τ_m:

$$\phi^{(e)}_{k,m} = (m+k-1)\Delta; \quad k = 1, 2, \ldots, L \tag{29}$$

$$\phi^{(i)}_{l,m} = (l-1)\Delta; \quad l = 1, 2, \ldots, L \tag{30}$$

Zu gegebenem m und k hat somit der v-Kurvenpunkt mit dem Index

$$l = m + k \tag{31}$$

die gleiche momentane azimutale Postion wie der u-Kurvenpunkt mit dem Index k. Umgekehrt hat zu gegebenem m und l der u-Kurvenpunkt mit dem Index:

$$k = l - m \tag{32}$$

die gleiche azimutale Position wie der v-Kurvenpunkt mit dem Index l. Analog zu den Azimutbezeichnungen werden die Bezeichnungen $u_{k,m}$ und $v_{l,m}$ für die Kurvenpunkte in Fig.1 eingeführt. Dann kann mit (31,32) das Gleichungssystem (9,10) für die diskreten Zeitpunkte τ_m auch so geschrieben werden:

$$\ddot{u}_{k,m} = -\nu_r^2 \cdot u_{k,m} - Q_1^2 (u_{k,m} - v_{m+k,m}) / (1 + (u_{k,m} - v_{m+k,m})^2) \tag{33}$$

$$\ddot{v}_{l,m} = -Q_i^2 (v_{l,m} - u_{l-m,m}) / (1 + (v_{l,m} - u_{l-m,m})^2) \tag{34}$$

wobei: $k = 1, 2, 3, \ldots, L$; $l = 1, 2, 3, \ldots, L$

Dies sind 2L verschiedene Gleichungen zur Bestimmung der Radialbeschleunigung der 2L Kurvenpunkte in den Zeitpunkten $\tau = \tau_m$. Die Gleichungen (33,34) sind natürlich nur für ganzzahlige m-Werte definiert, weil jeweils nur dann Elektronen- und entsprechende Ionenschwerpunkte gleiche Azimutalpositionen einnehmen. Das bedeutet aber keine Einschränkung für die Zeitintegration von (33, 34) und damit auch von (9,10), da genaue Schrittverfahren bekannt sind, für die man keine Zwischenwerte benötigt. Das Gleichungssystem (33,34) kann abgekürzt in folgender Form geschrieben werden:

$$\ddot{y} = f(y_m, \tau_m) \tag{35}$$

wobei y_m bzw. f_m die Vektoren, gebildet aus den $u_{k,m}$ und $v_{l,m}$ bzw. den zugehörigen rechten Seiten von (33,34) bezeichnet. Der als explizites Argument von f auftretende Zeitparameter τ_m soll andeuten, daß man die Parameter ν_r, Q_1 und Q_i in (33,34) gegebenenfalls auch zeitabhängig annehmen kann.

Für die numerische Integration wurde das folgende Predictor-Corrector-Schema benützt /6/ [2]:

$$\tilde{y}_{m+1} = 2y_{m-1} - y_{m-3} + (4\Delta^2/3)\cdot(f_m + f_{m-1} + f_{m-2}) \tag{36}$$

$$y_{m+1} = 2y_m - y_{m-1} + (\Delta^2/12)(\tilde{f}_{m+1} + 10f_m + f_{m-1}) \tag{37}$$

wobei $f_m = f(y_m, \tau_m)$ und $\tilde{f}_m = f(\tilde{y}_m, \tau_m)$.

Um das Verfahren zu starten, müssen außer den 'Anfangsbedingungen' y_o und y_{-1} auch noch y_{-2} und y_{-3} verfügbar sein. Dazu muß der Ringzustand für $\tau \leq 0$ bekannt sein bzw. vorgegeben werden. Den experimentellen Gegebenheiten entsprechend ist es sinnvoll, dazu eine endliche Anfangsstörung vorzugeben, die noch im linearen Bereich der Wechselwirkungsterme von (9,10) liegt. Andernteils

---

2) Ein demgegenüber weniger zeitaufwendiges Verfahren (vgl.Mtl. Mittlg., IPP, Nr.84) kam bei den hier durchgeführten Auswertungen noch nicht zur Anwendung.

muß diese Störung genügend groß sein, damit im Falle einer Instabilität das nichtlineare Regime nach einer genügend kleinen Zahl von Integrationsschritten erreicht wird. Dies setzt auch voraus, daß die in der linearen Theorie und experimentell als instabilitätsanfällig bekannte Schwingungsmode $A_o \cdot \cos(\phi-(1-\nu_r)\cdot\tau+\delta)$ (A_o = Anfangsamplitude, δ = Phasenwinkel) jedenfalls schon in der Anfangsstörung mit ausreichender Intensität vertreten sein muß.

Da die spezielle Wahl des Phasenwinkels unwesentlich ist, wird als Anfangsstörung für die Elektronen angesetzt:

$$u_{k,m} = A_o \cdot \cos\Delta\cdot((m+k-1)-(1-\nu_r)m), \text{ für } m \leq 0 \qquad (38)$$

Für die gezeigten Auswertungen wurde meist $A_o = 0.1$ gesetzt, was zusammen mit der folgenden Gleichung (39) noch genügend lineare Startbedingungen ergibt.

Für die Ionen wird die Anfangsstörung zu Null angenommen, d.h.:

$$v_{l,m} = 0 \quad \text{für } m \leq 0 \qquad (39)$$

Die Startbedingungen (28,29) entsprechen dem Fall, daß ein anfänglich im Gleichgewicht befindlicher Ring eine zunächst nur den Elektronen erteilte Kollektivstörung erfährt oder daß Ionen in einem schon gestörten Elektronenring zur Zeit $\tau \lesssim 0$ im Mittel in der Gleichgewichtslage gebildet werden. Dabei wäre in (38) ν_r genauer durch $(\nu_r^2+Q_1^2)^{1/2}$ zu ersetzen, wie man aus (9) mit $v = 0$ erkennt. Da es bei der Anfangsstörung jedoch nur auf genügende Präsenz (nicht auf die Reindarstellung) der instabilitätsanfälligen Mode ankommt, ist dieser Unterschied unwesentlich. Die zum Start von (36,37) erforderlichen Werte für y_o, y_{-1}, y_{-2}, y_{-3}, f_o, f_{-1}, f_{-2} erhält man hier mit hinreichender Genauigkeit direkt aus (38,39). Auf ein spezielles Runge-Kutta-Startverfahren kann im vorliegenden Fall verzichtet werden.

Zur Integrationsfehlerabschätzung wird der Abbrechfehler des Correctors (37) verwendet. Nach /6/ gilt für die Größenordnung des Abbrechfehlers ε_1 pro Zeitschritt:

$$\varepsilon_1 \approx \Delta^6 \cdot y^{(6)}/240 \qquad (40)$$

Dabei ist $y^{(6)}$ die totale 6. Ableitung von u oder v nach τ. Nimmt man zur Abschätzung u bzw. $v \approx A \cos(\tau-(1-\nu_r)\tau)$ an (und A = const), dann erhält man für $\nu_r \to 1$ maximal $y^{(6)} \approx A$. Für den Absolutfehler ε_L pro Elektronenumlauf (L Schritte) erhält man damit aus (28,40):

$$\varepsilon_L \lesssim A \cdot (L/240) \cdot (2\pi/L)^6 \qquad (41)$$

Die rechte Seite von (41) entspricht dem Grenzfall, daß die Fehler sich von Schritt zu Schritt ohne Kompensation aufsummieren. Mit L = 16 ergibt sich dann $\varepsilon_L \lesssim 2.4\times10^{-4} \cdot A$. Da die Integrationsvariablen im vorliegenden Fall oszillieren, gilt dies auch für $y^{(6)}$, so daß die einzelnen Abbrechfehler sich in der Gesamtwirkung weitgehend kompensieren. Daher wird ε_L im vorliegenden Fall weit unterhalb der angegebenen Schranke bleiben. Bei dem vorliegenden Integrationsverfahren sind somit bis zur Größenordnung von wenigstens 10^3 Elektronenumläufen hinreichend genaue Ergebnisse zu erwarten.

Im Vergleich mit der am Ende von Abschnitt 2 beschriebenen Fourier-Methode ist das benützte Predictor-Corrector-Verfahren nicht nur wegen des geringeren Rechenzeitbedarfs, sondern vermutlich auch hinsichtlich der Rechengenauigkeit vorzuziehen. Bei der numerischen Integration von (26,27) würde nämlich als zusätzlicher Fehler in jeden Zeitschritt auch die mit der numerischen Berechnung der Fourier-Integrale verbundene Ungenauigkeit mit eingehen.

7. Literatur

1 C. Andelfinger et al., Proc.9th Int.Conf.on High Energy Accel., Stanford/USA (1974), p.218

2 D.G. Koshkarev, R.P. Zenkevich, Part.Accel.3,1 (1972)

3 U. Schumacher et al., Proc.Int.Conf.on Electron Beam Res. and Technology, Albuquerque, N.M./USA (1975), p.385

4 N.Y. Kazarinov et al., Part.Accel.7 (1975), p.49

5 W. Dommaschk, MPI f.Plasmaphysik, Garching, Report IPP O/19

6 R.W. Hamming, Numerical Methods f.Scientists and Engineers, McGraw Hill, N.Y.(1962), p.214

7 W. Dommaschk, IPP, RPR-N-30 (6.4.1975)

8 C. Andelfinger et al., IPP Report O/30 (1976)

9 W. Dommaschk, II Symp.on Collective Methods of Acceleration, Dubna/USSR (1976), p.63

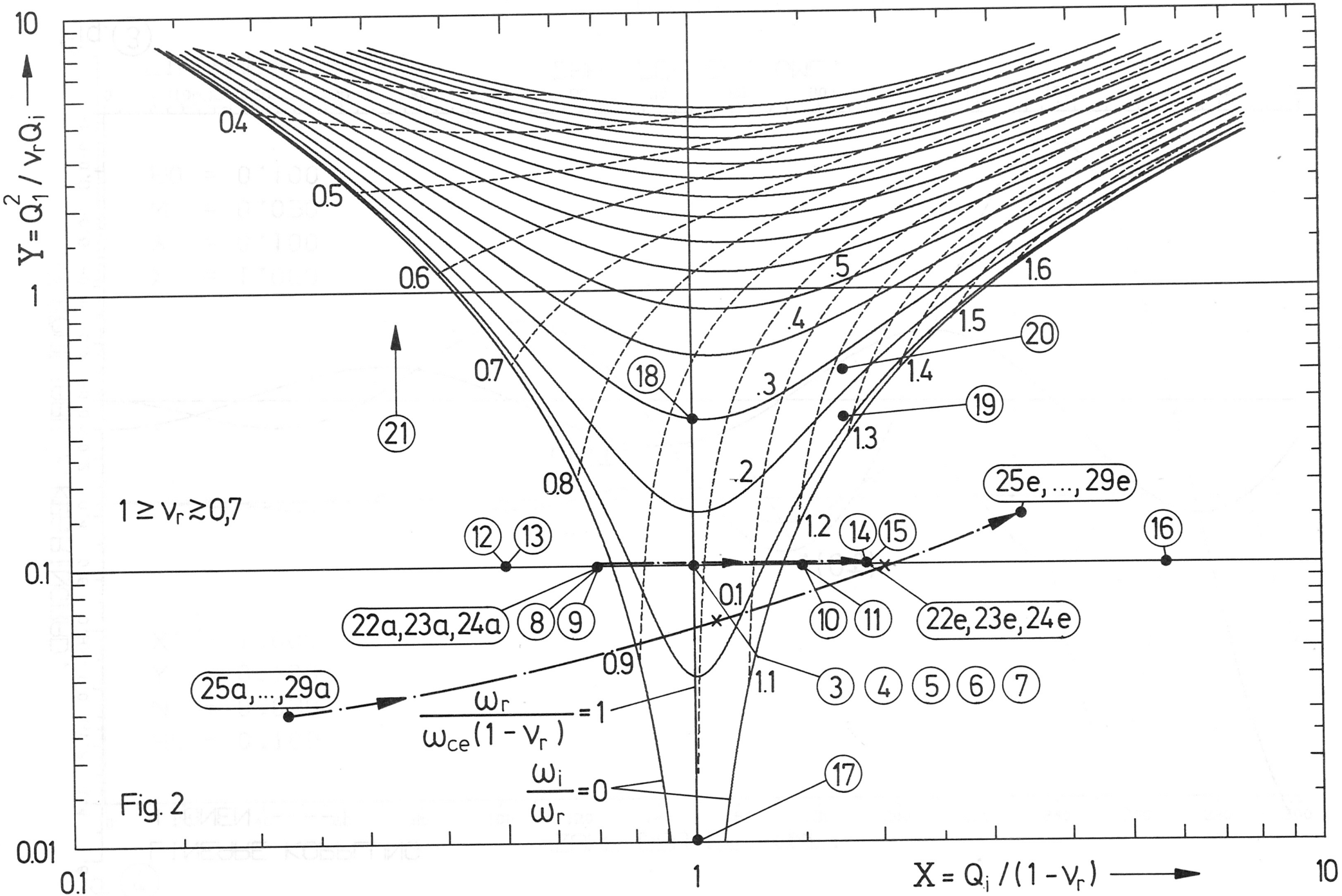

10
1
0.1
0.01
0.1
1
10
$Y = Q_1^2 / \nu_r Q_i$
$X = Q_i / (1 - \nu_r)$
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
.2
.3
.4
.5
$1 \geq \nu_r \gtrsim 0{,}7$
$\frac{\omega_r}{\omega_{ce}(1-\nu_r)} = 1$
$\frac{\omega_i}{\omega_r} = 0$
21
18
20
19
12
13
22a,23a,24a
8
9
25a,...,29a
25e,...,29e
16
14
15
10
11
22e,23e,24e
3
4
5
6
7
17

Fig. 2

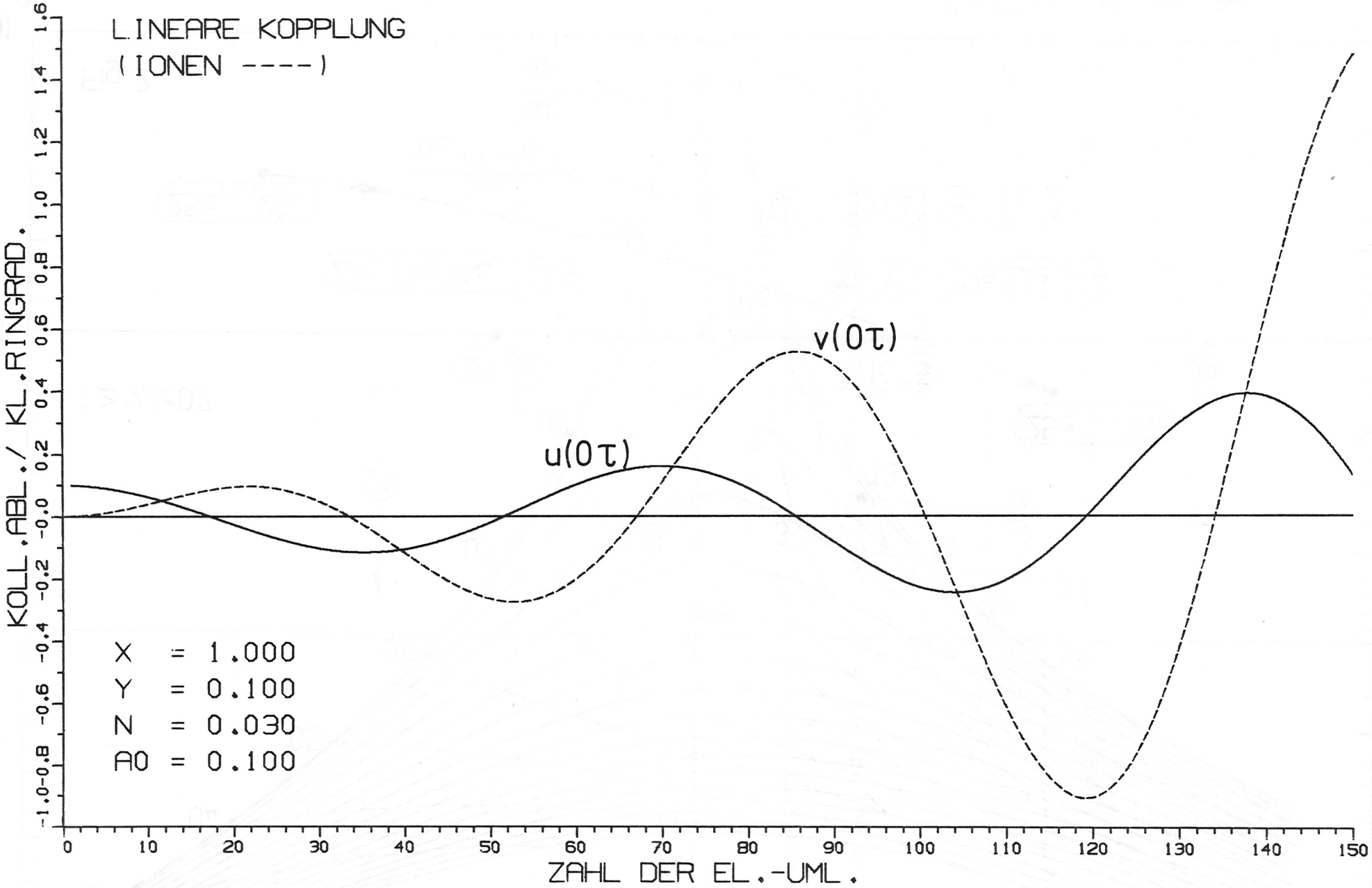

LINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
v(0τ)
u(0τ)
X = 1.000
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 -0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150

Fig. 3

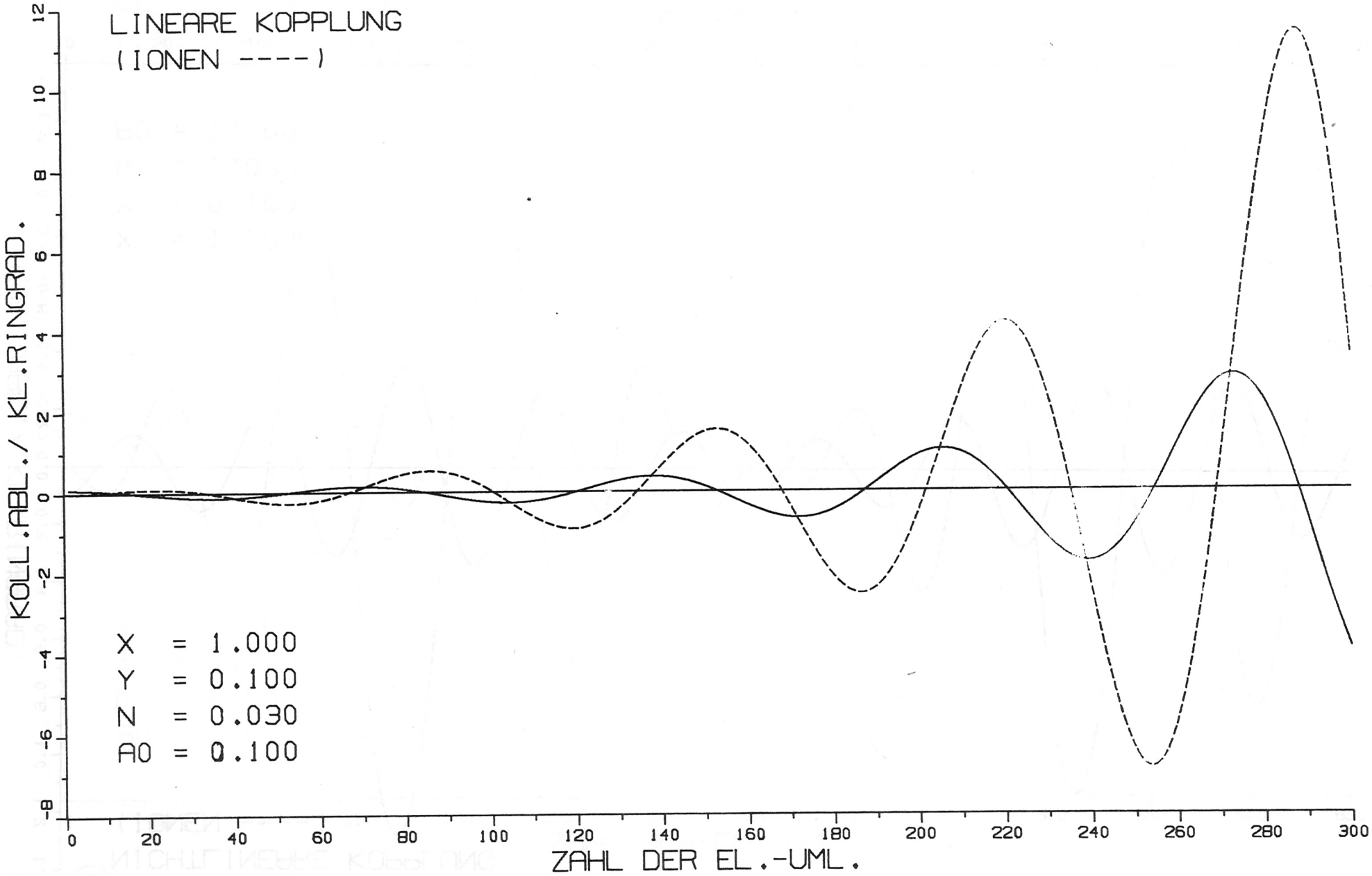

LINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 1.000
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Fig. 4

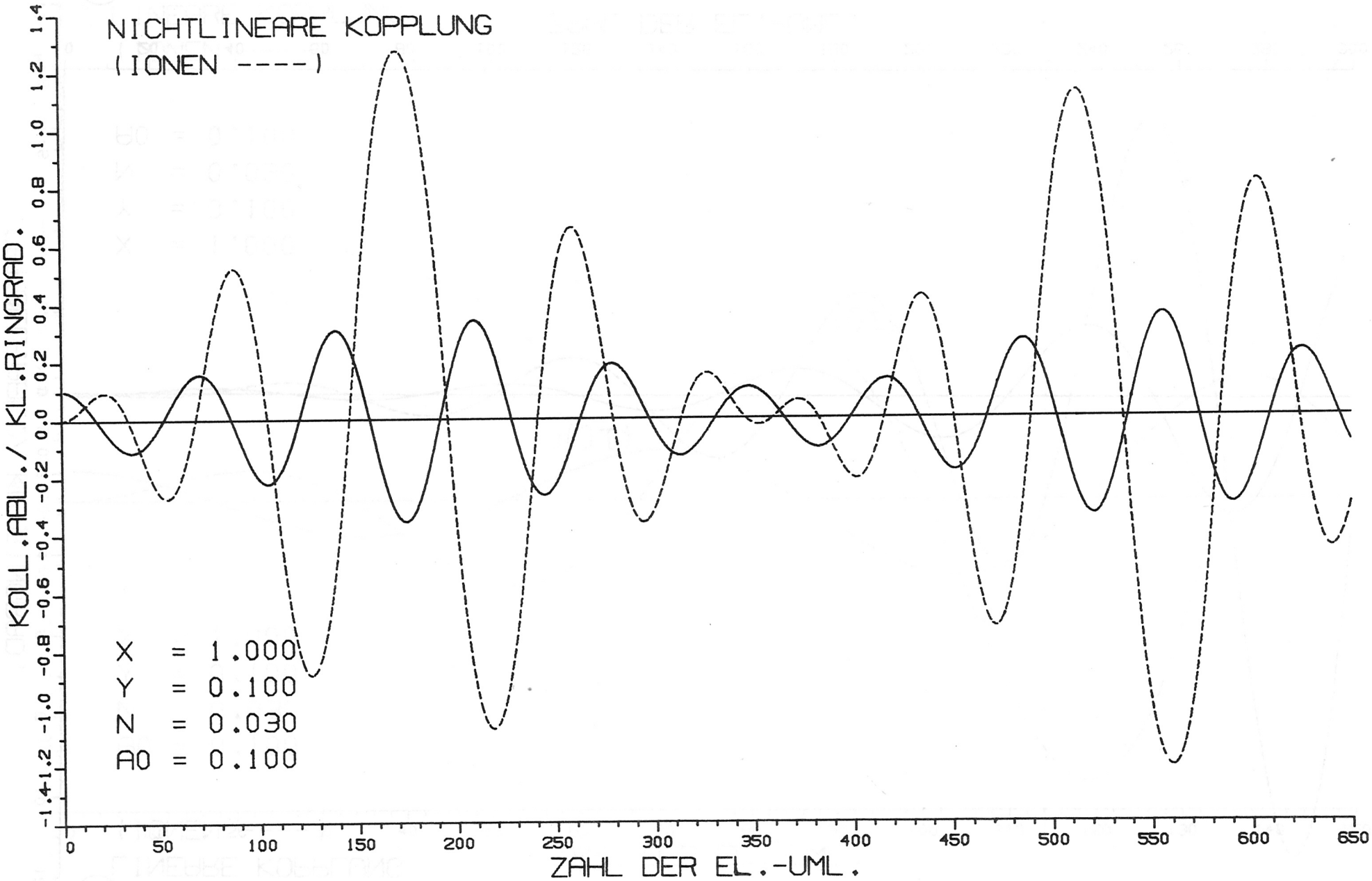

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 1.000
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
-1.4
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650

Fig. 5

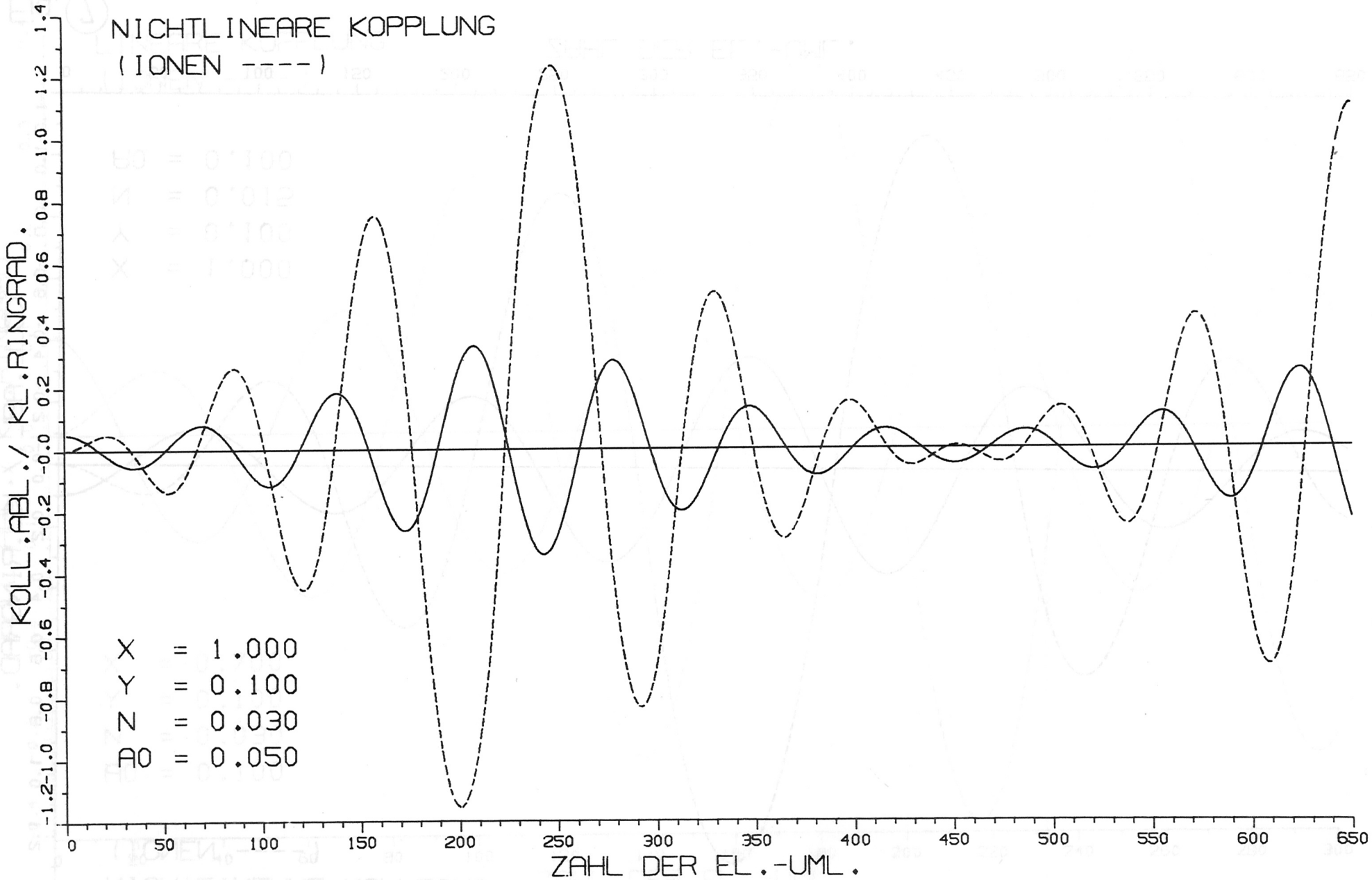

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 1.000
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.050
KOLL.ABL./KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650

Fig. 6

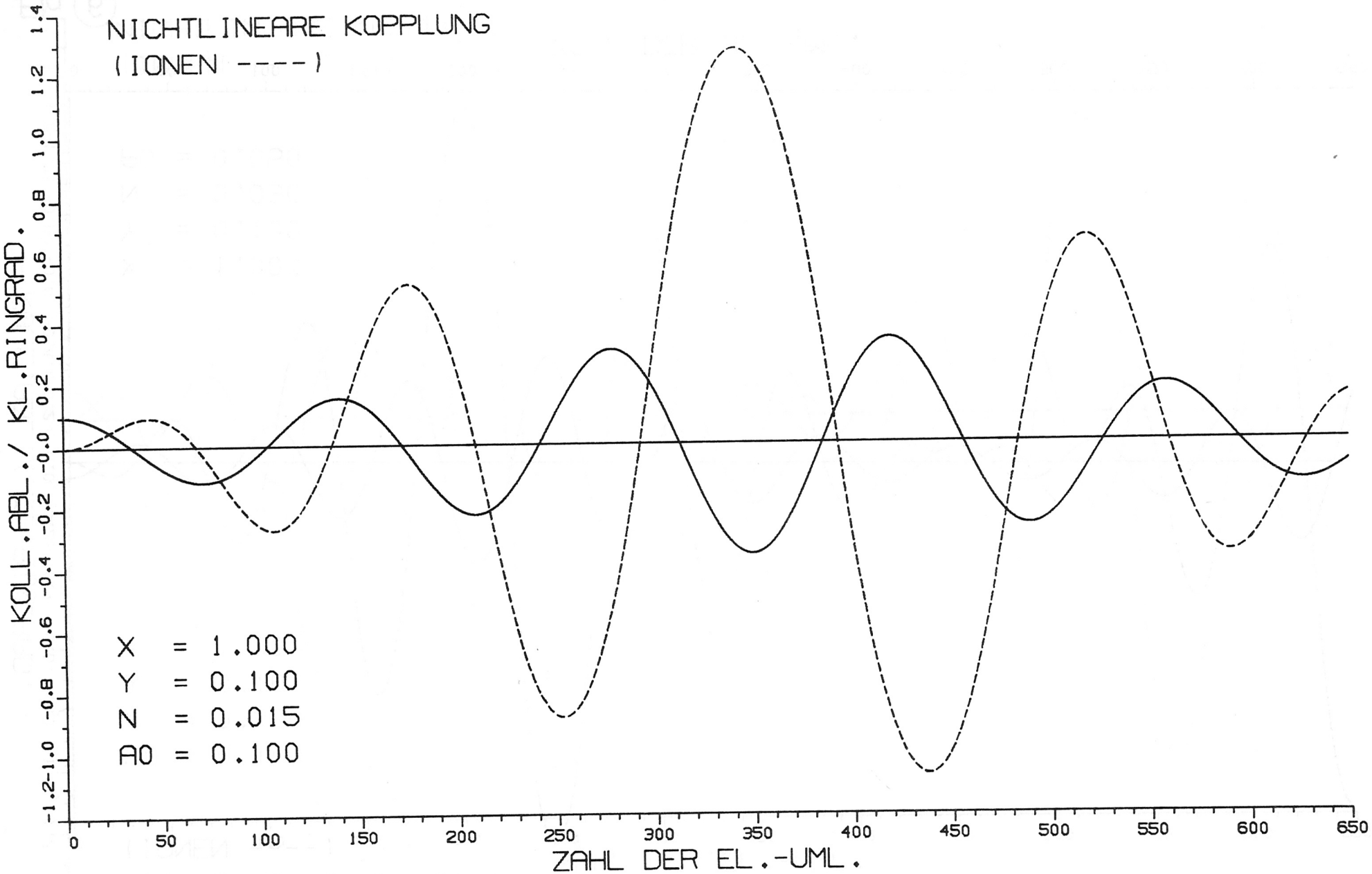

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 1.000
Y = 0.100
N = 0.015
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650

Fig. 7

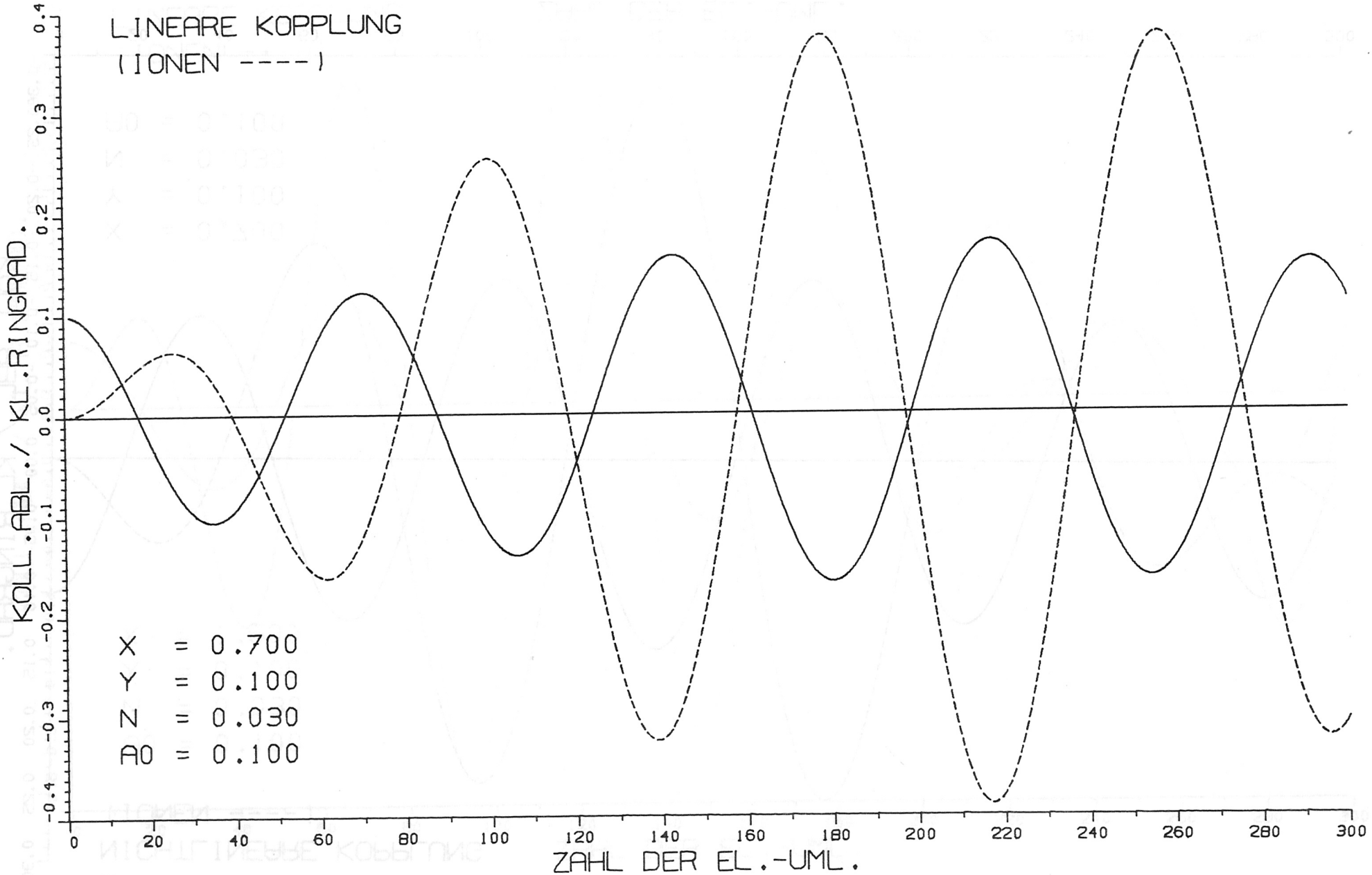

LINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 0.700
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Fig. 8

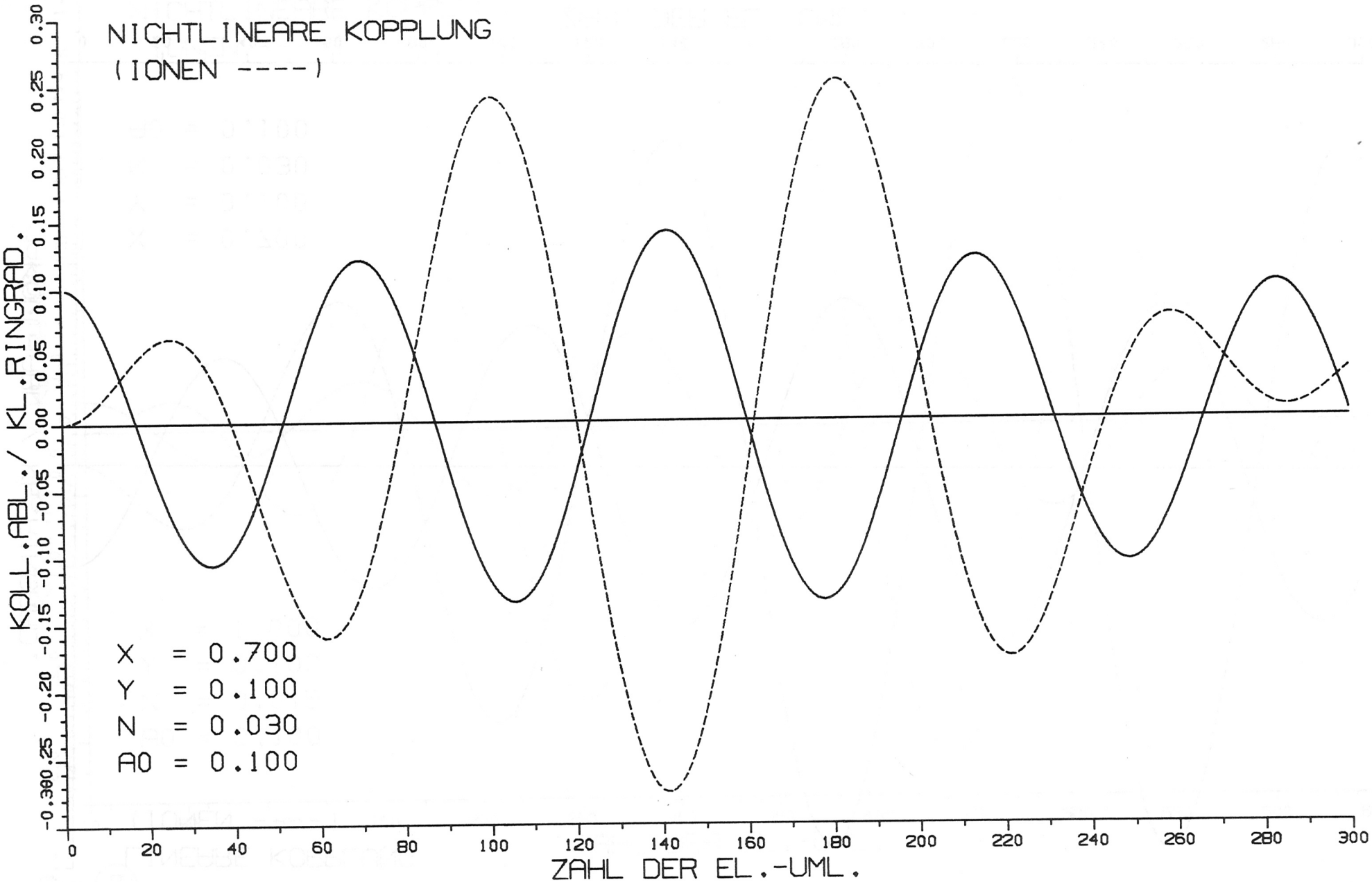

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 0.700
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20
-0.25
-0.30
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Fig. 9

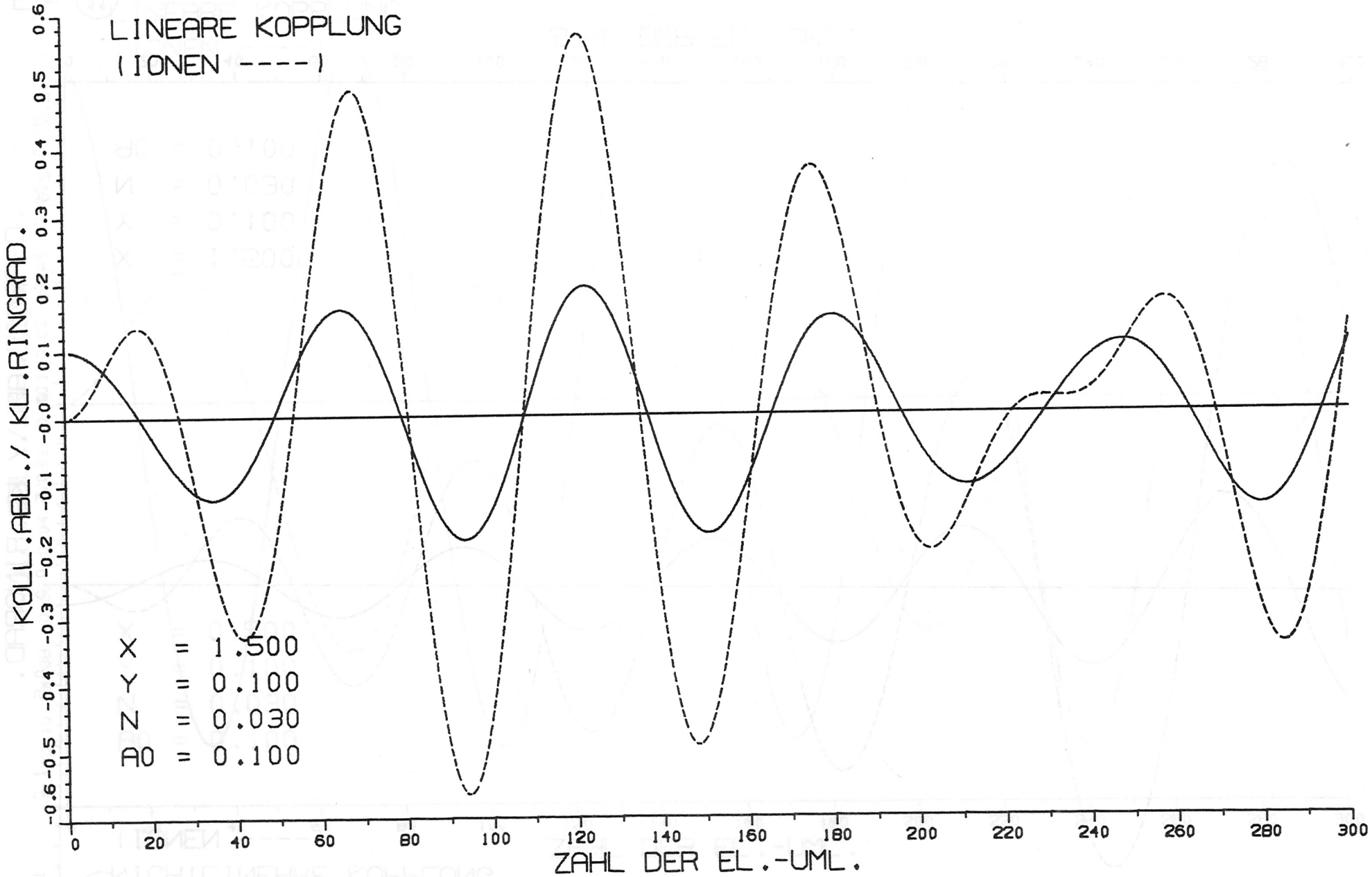

LINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 1.500
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-0.0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Fig. 10

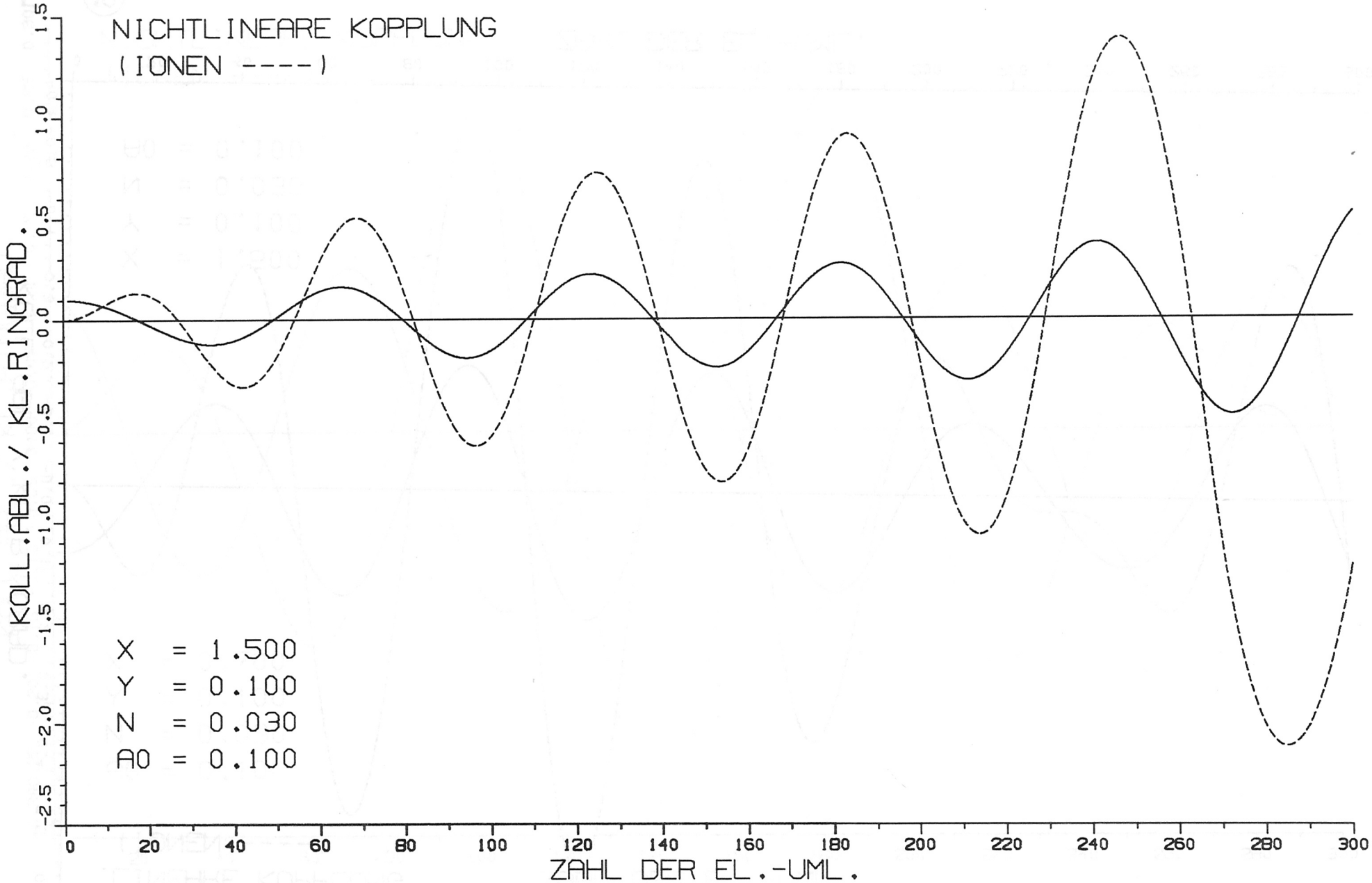

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 1.500
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL. / KL.RINGRAD.
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 11

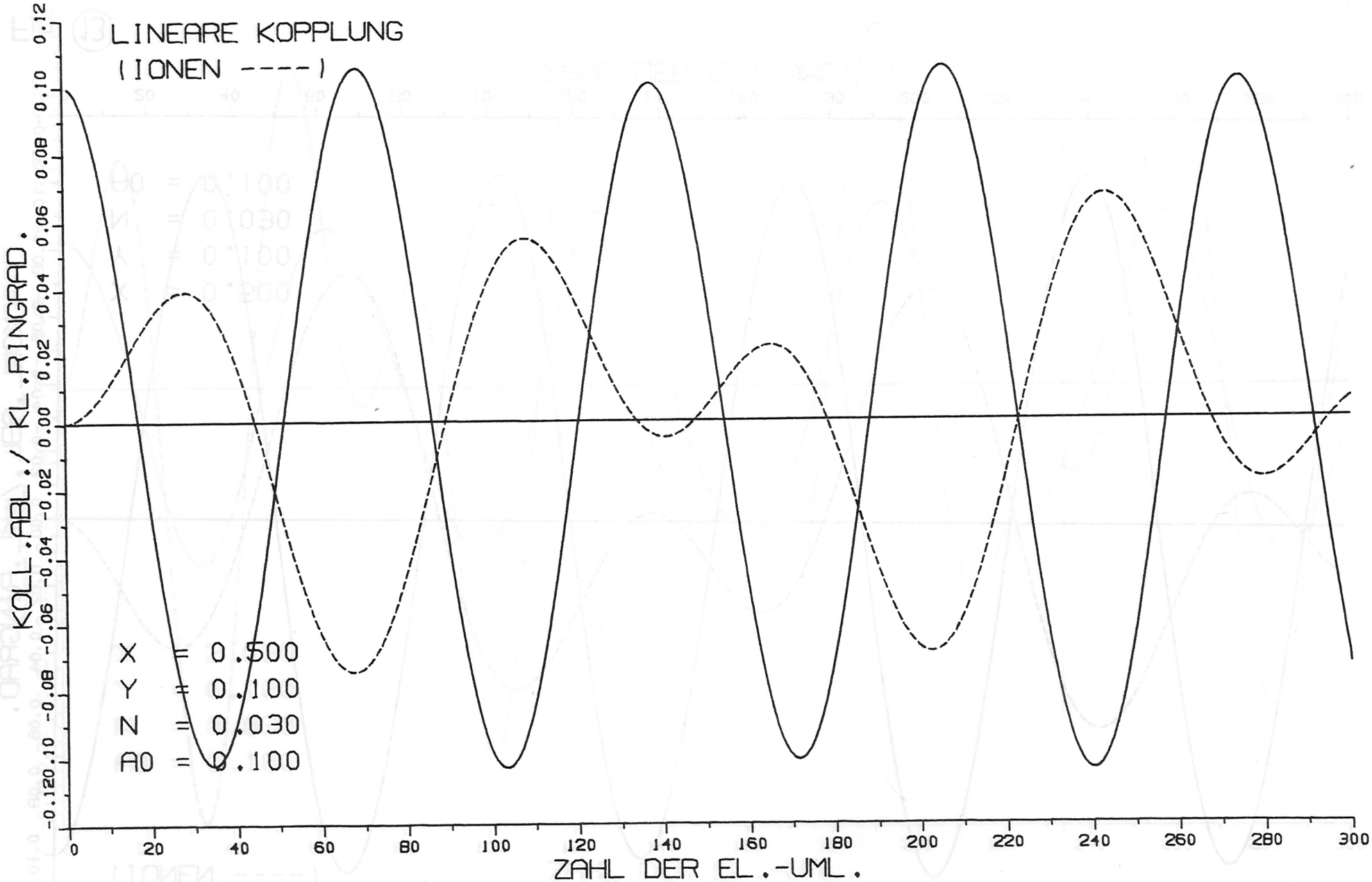

LINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 0.500
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.10
-0.12
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Fig. 12

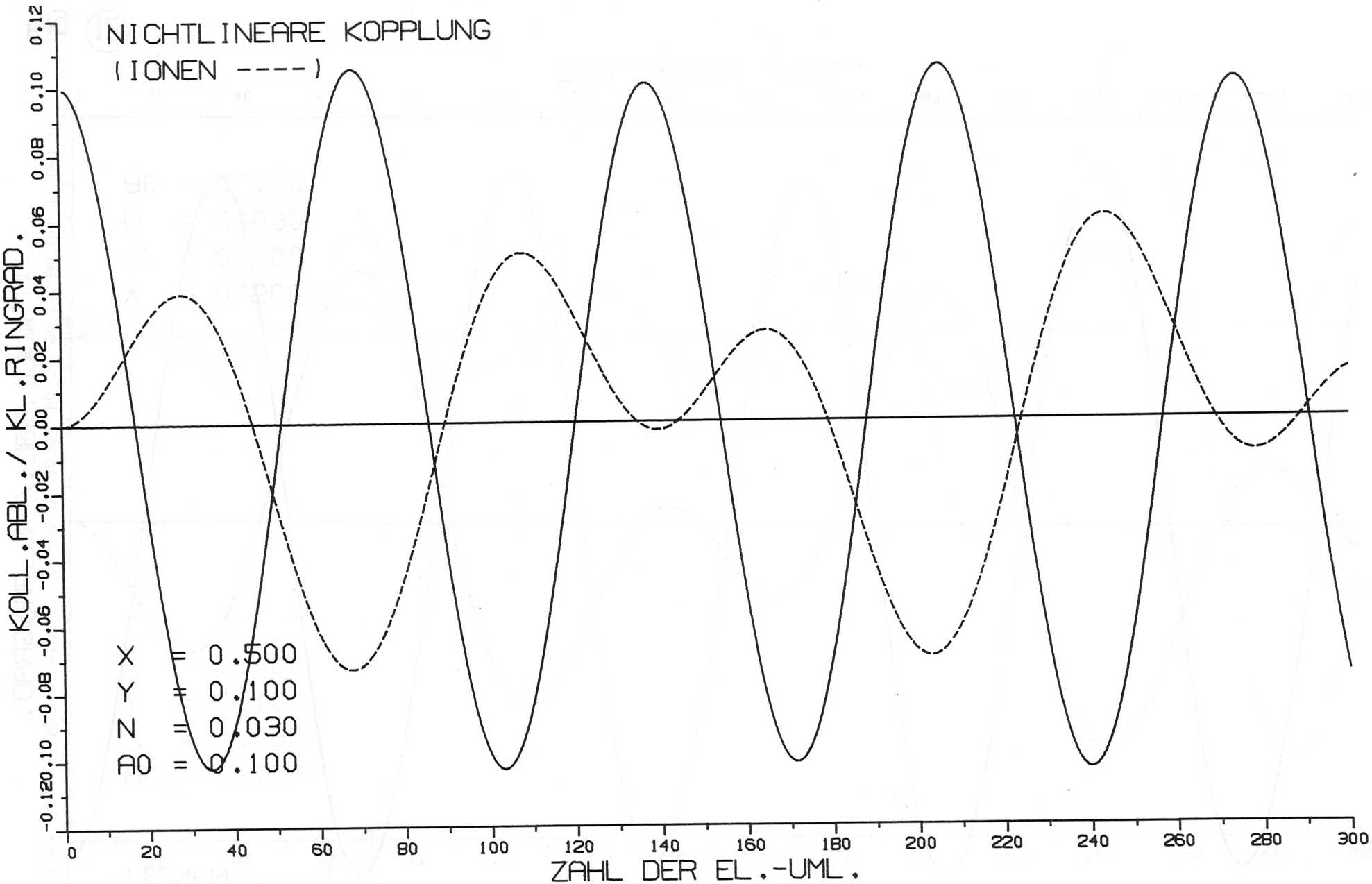

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.10
-0.12
X = 0.500
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 13

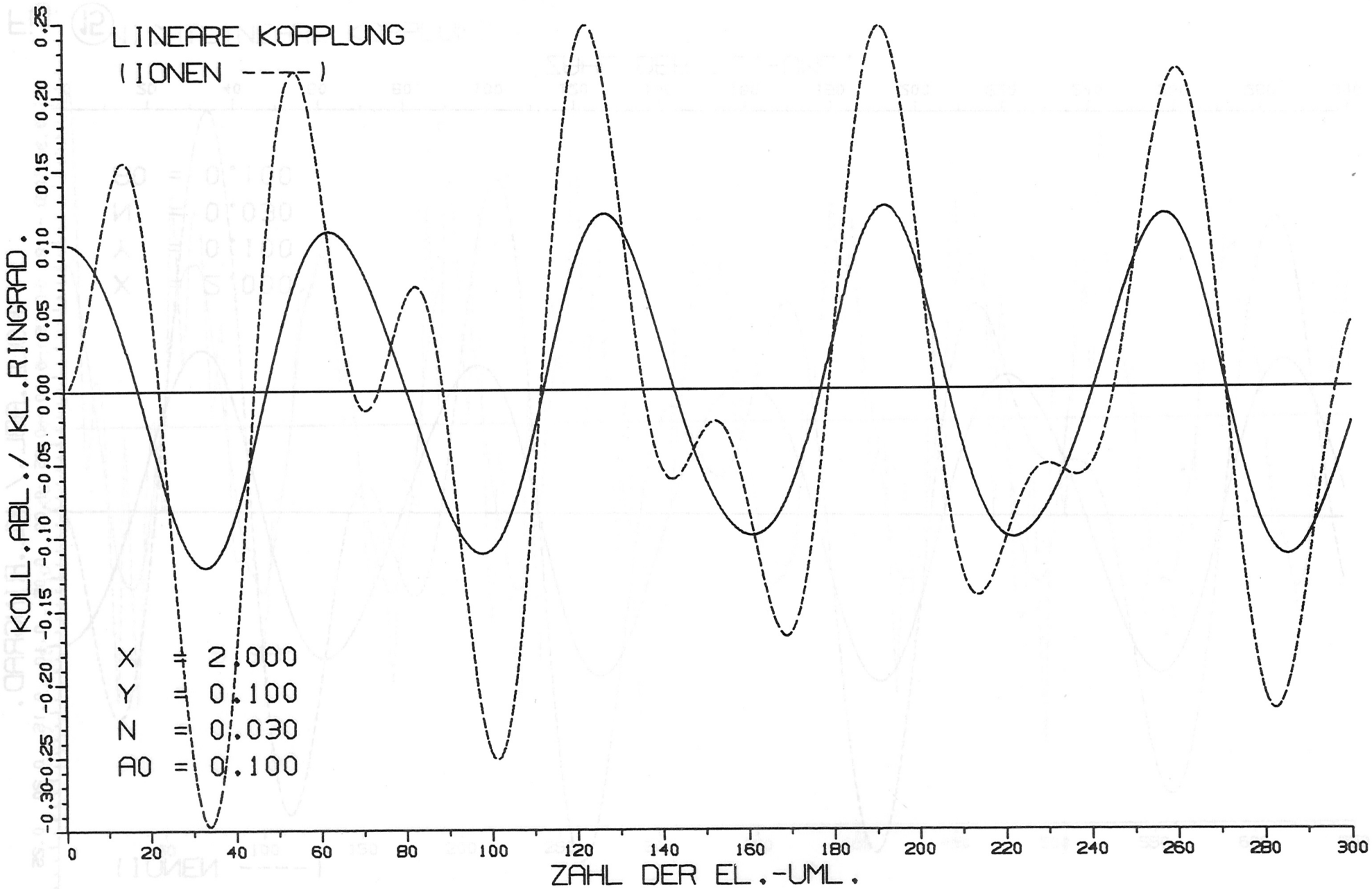

LINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 2.000
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20
-0.25
-0.30
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Fig. 14

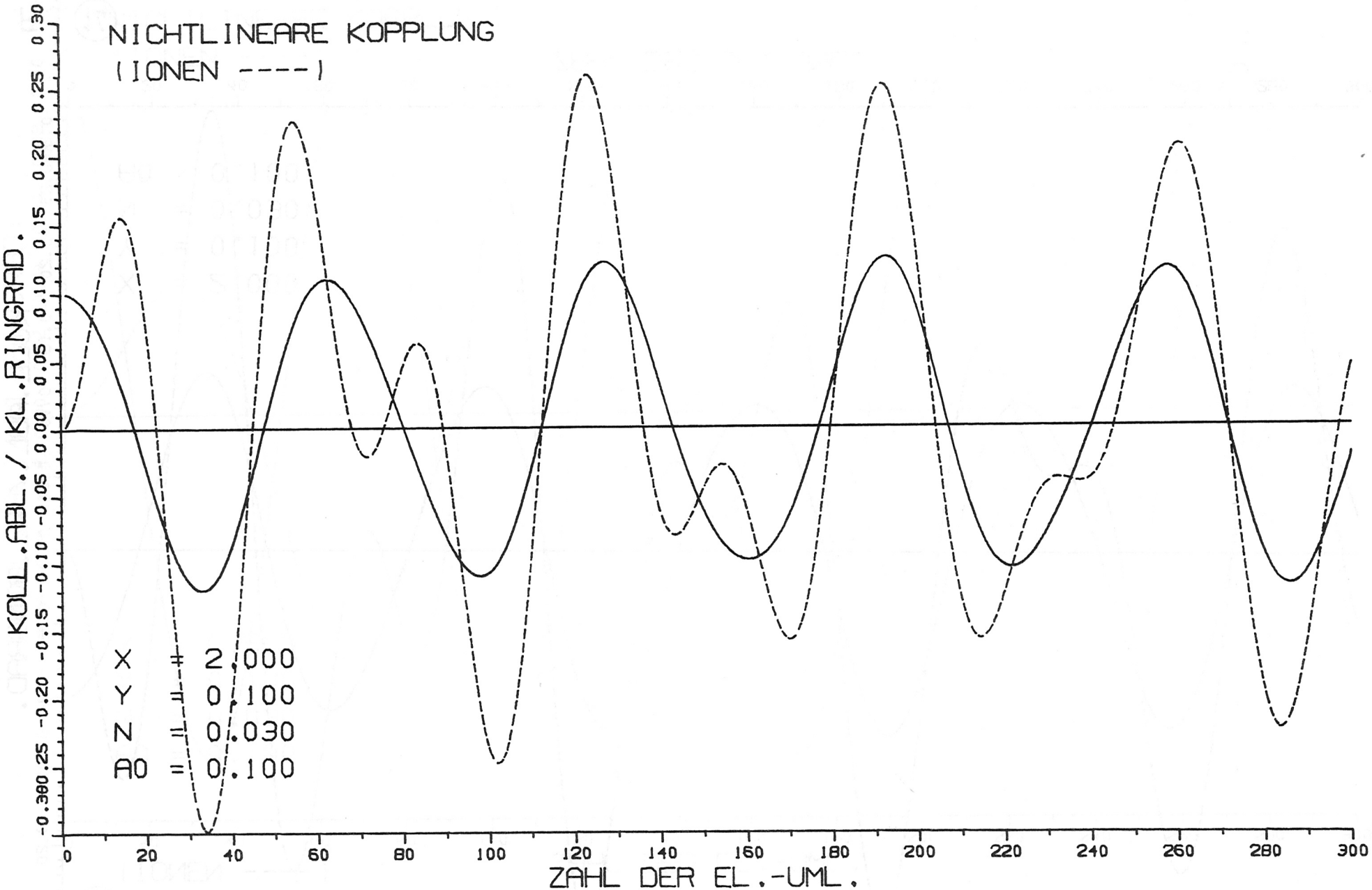

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 2.000
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20
-0.25
-0.30
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Fig. 15

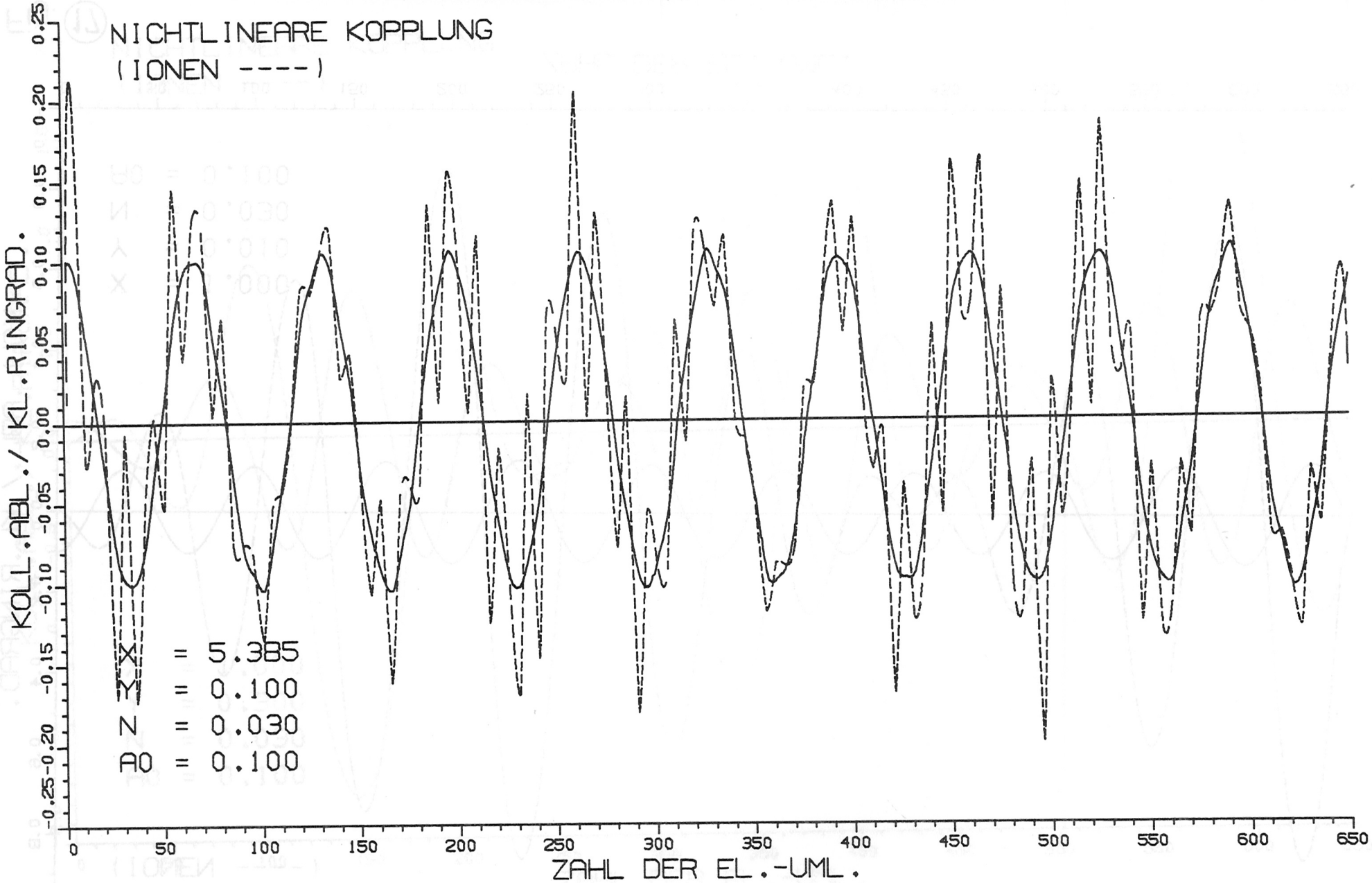

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
X = 5.385
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20
-0.25
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650

Fig. 16

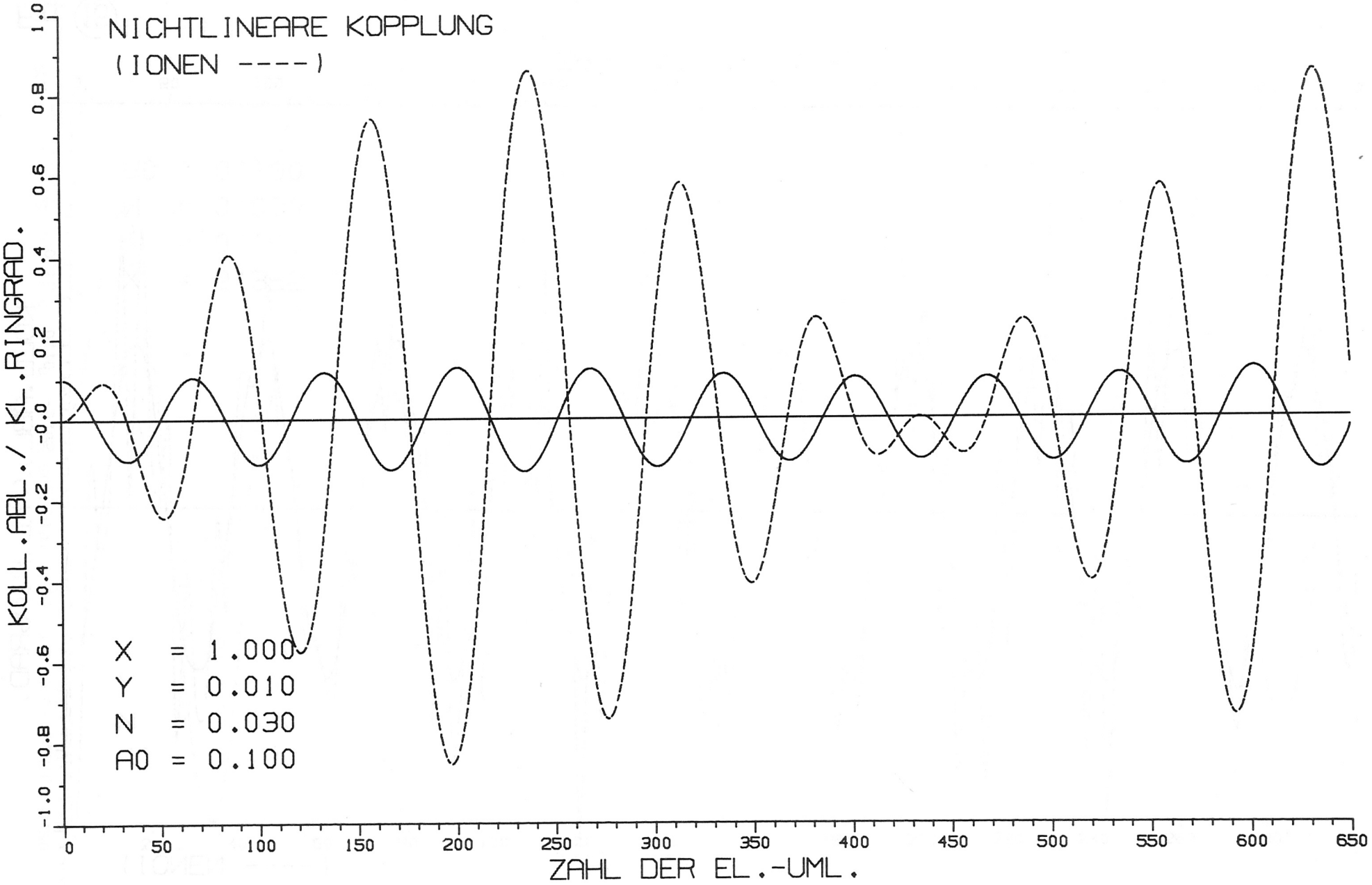

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
X = 1.000
Y = 0.010
N = 0.030
A0 = 0.100
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 17

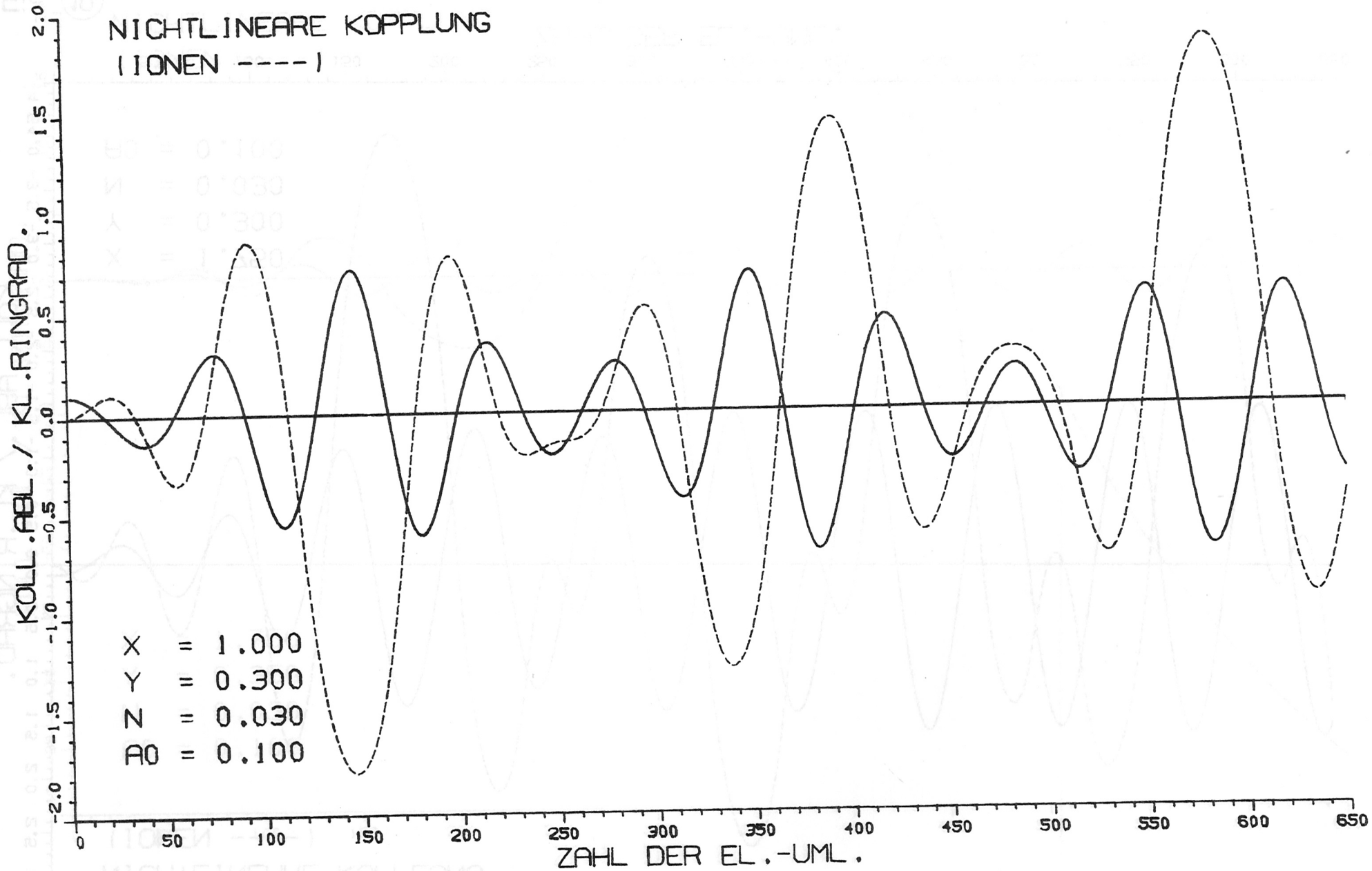

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
X = 1.000
Y = 0.300
N = 0.030
A0 = 0.100
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 18

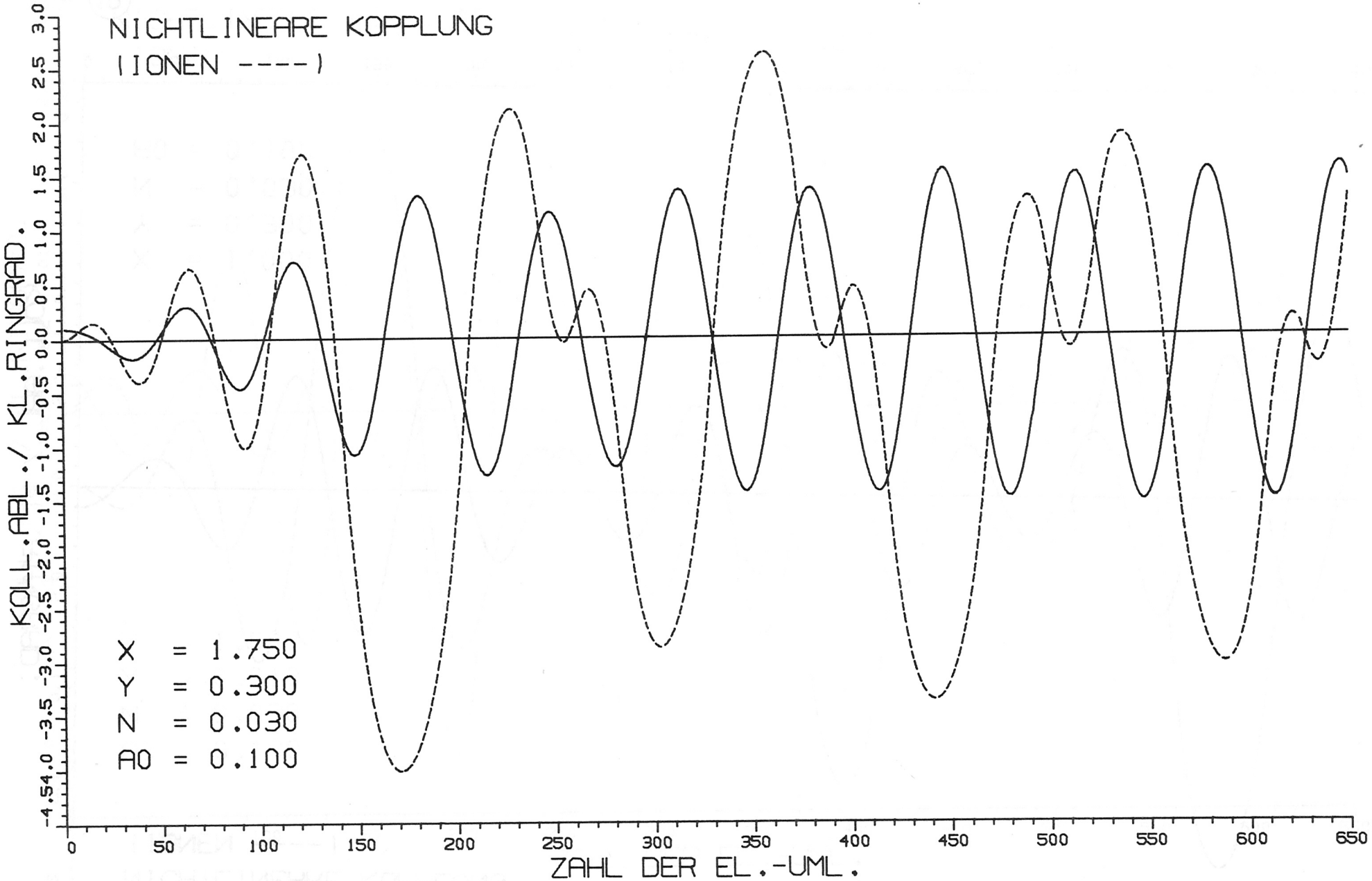

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 1.750
Y = 0.300
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.5
4.0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650

Fig. 19

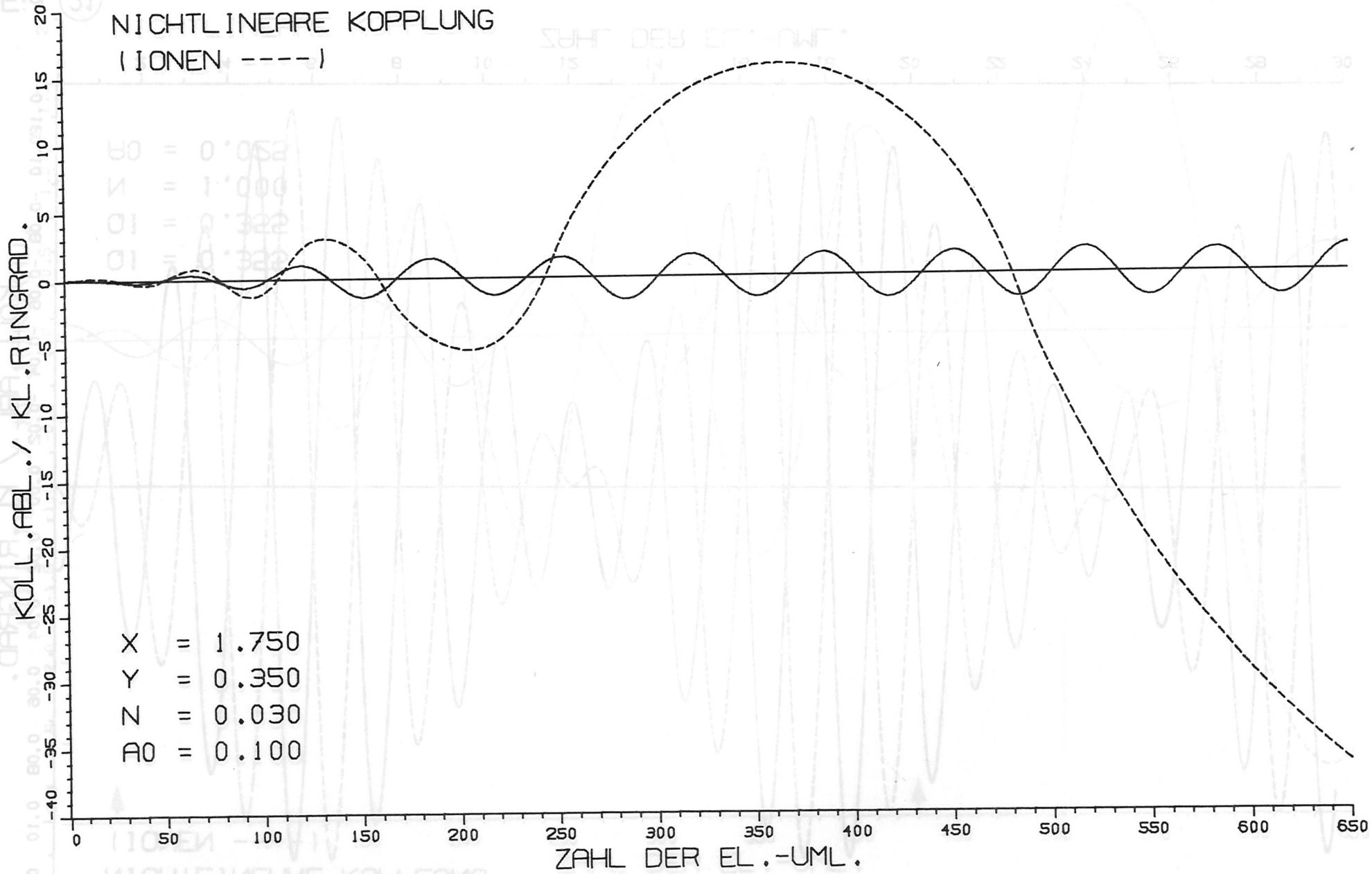

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
X = 1.750
Y = 0.350
N = 0.030
A0 = 0.100
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650

Fig. 20

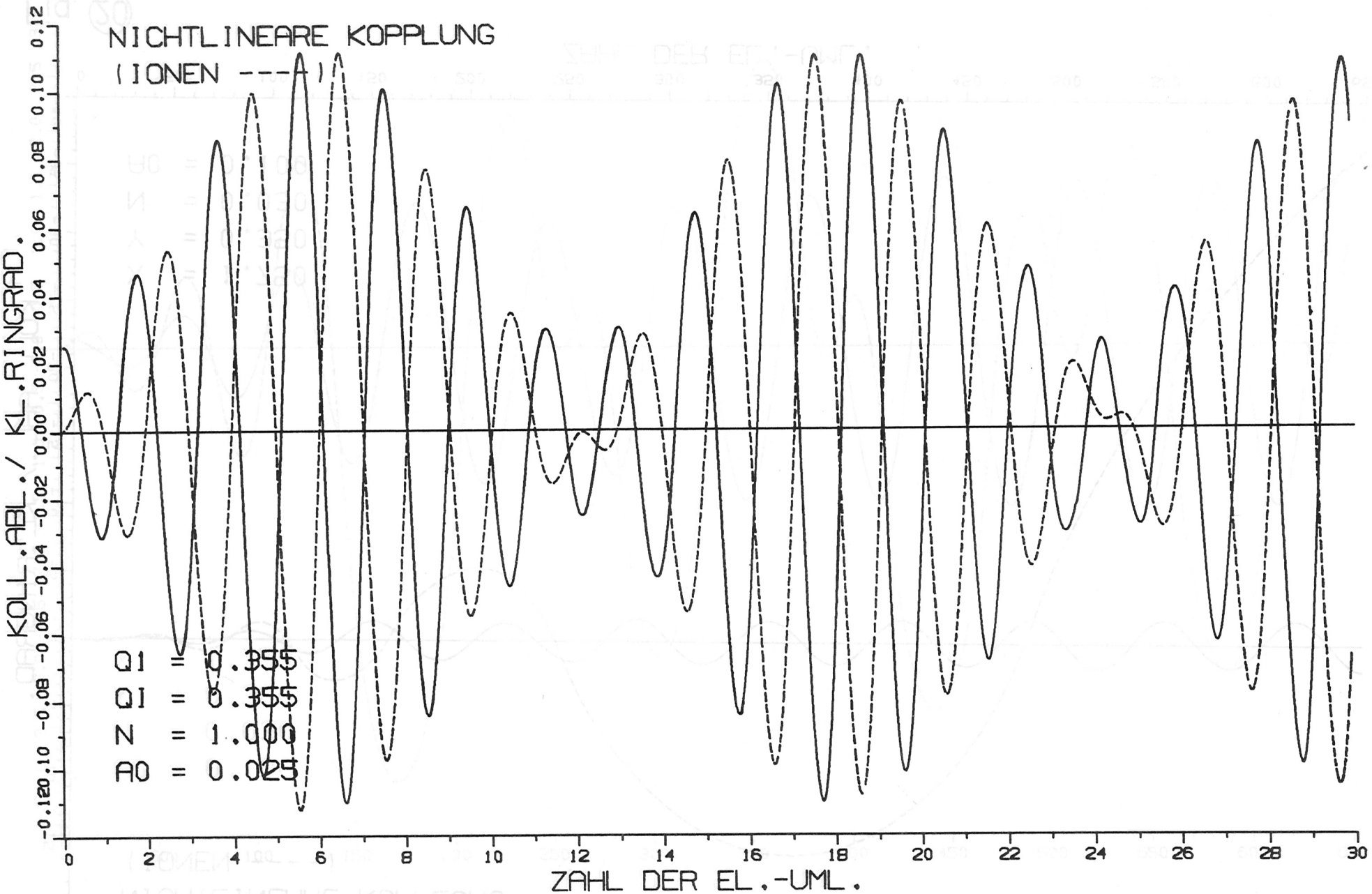

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ---)
Q1 = 0.355
QI = 0.355
N = 1.000
A0 = 0.025
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.10
-0.12
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30

Fig. 21

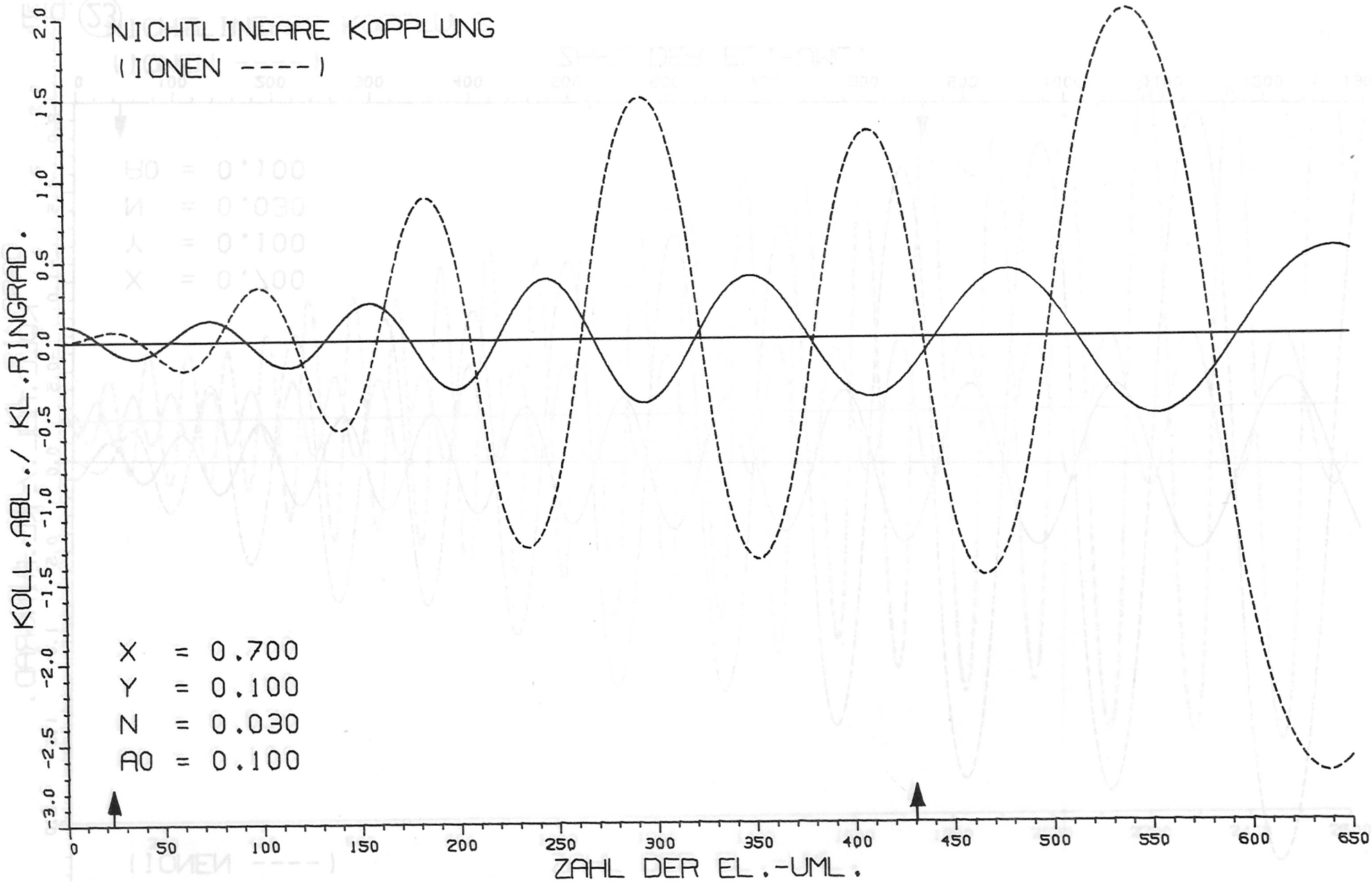

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
X = 0.700
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 22

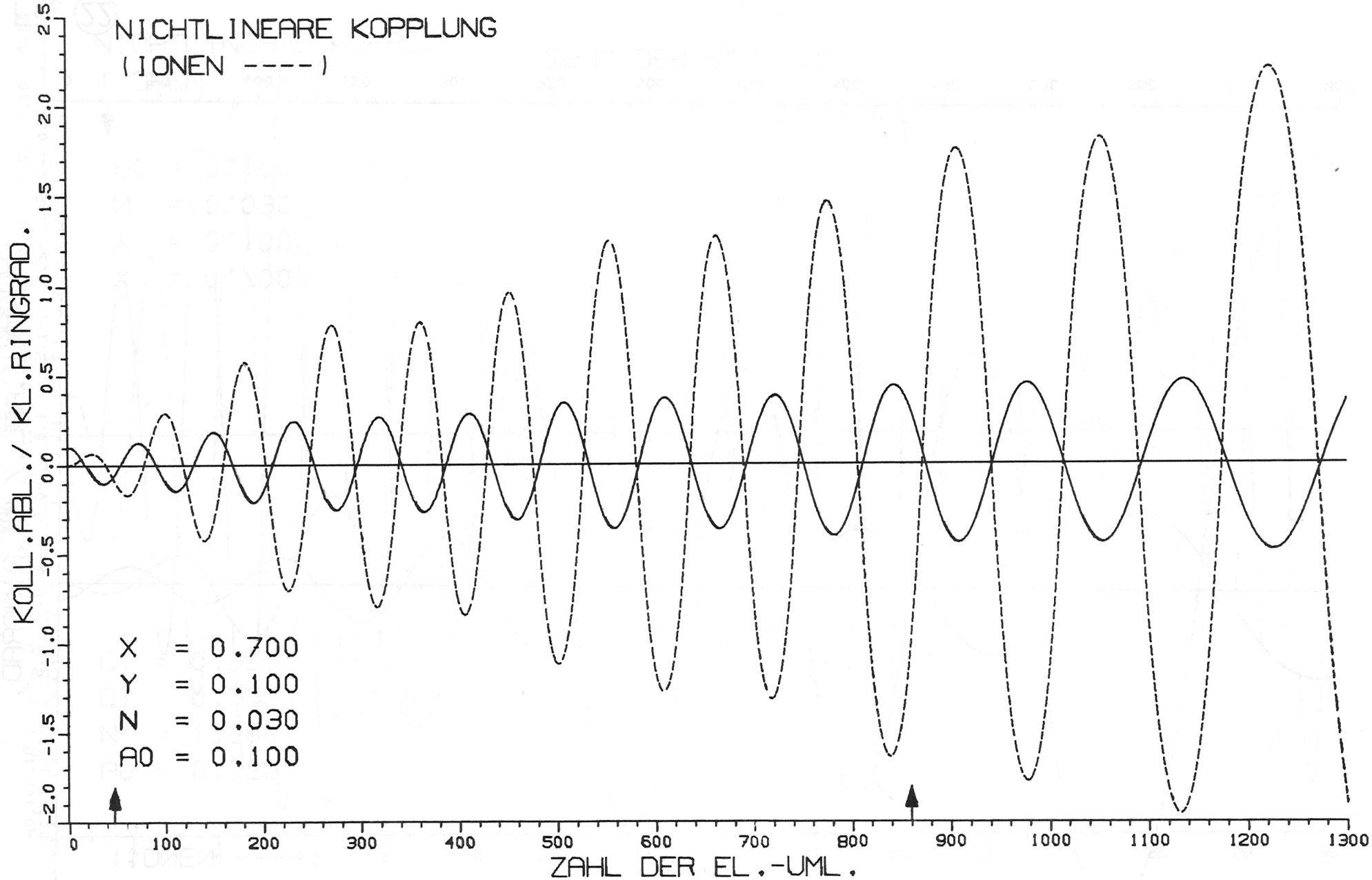

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
X = 0.700
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 23

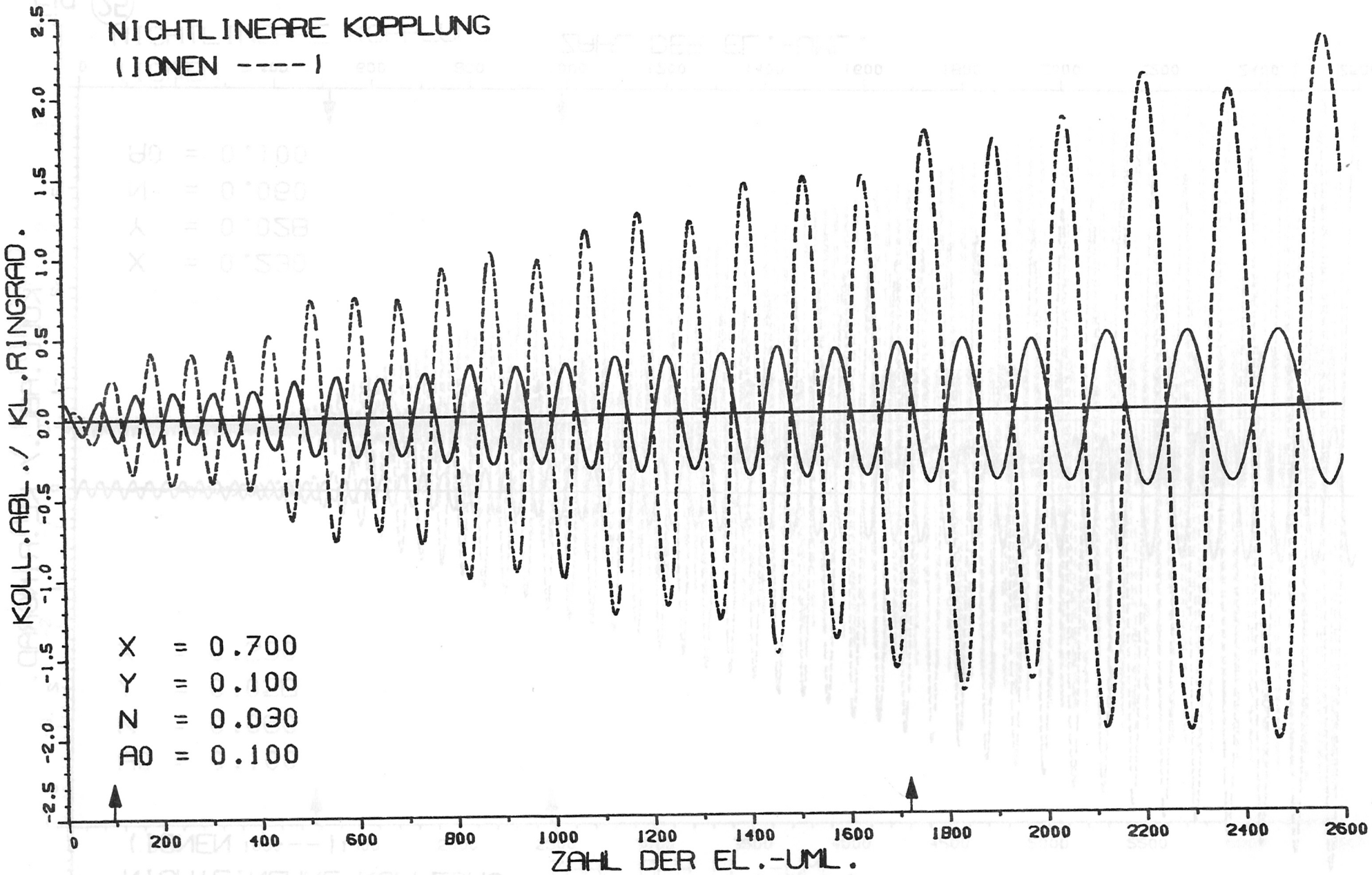

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 0.700
Y = 0.100
N = 0.030
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600

Fig. 24

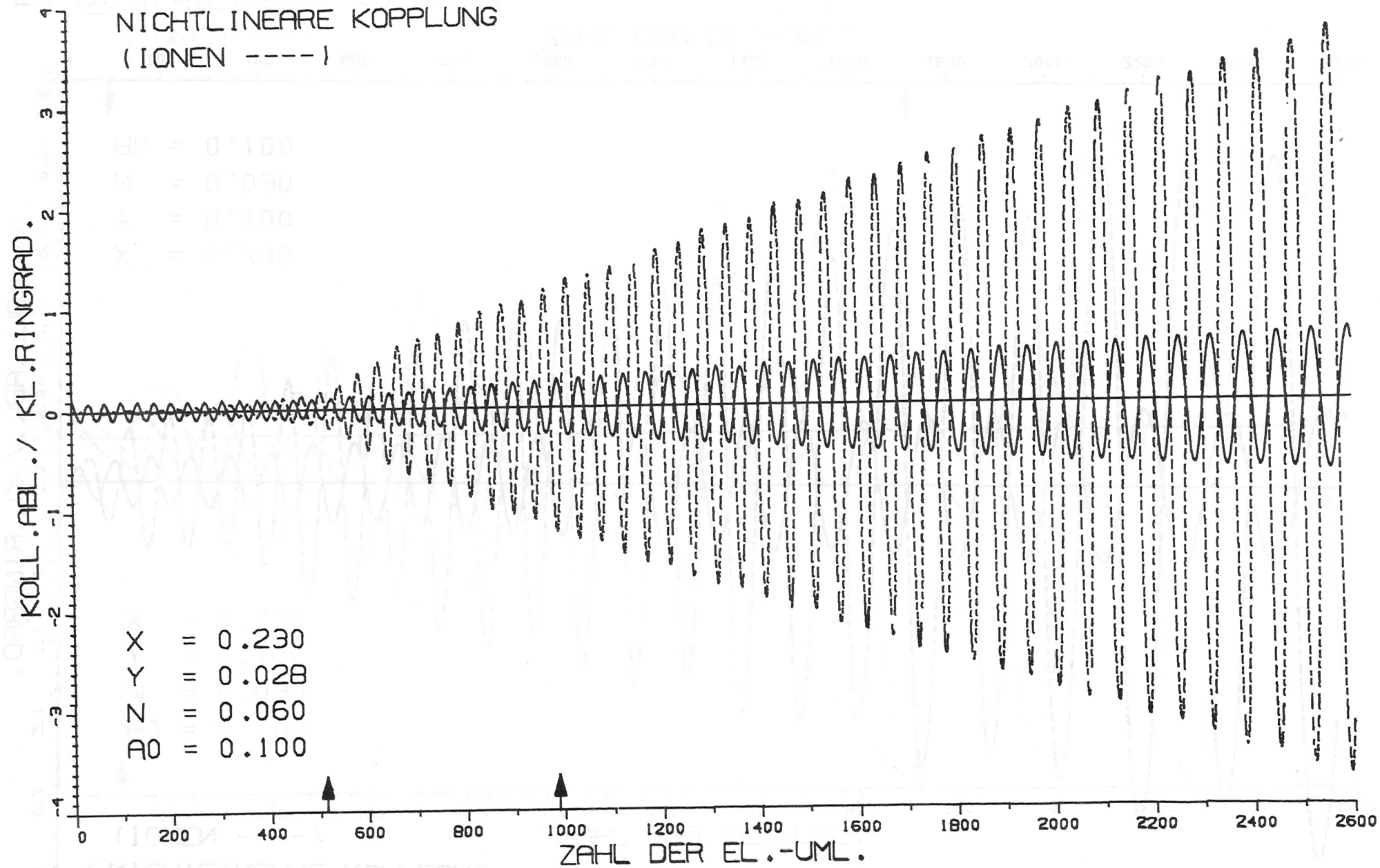

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
X = 0.230
Y = 0.028
N = 0.060
A0 = 0.100
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 25

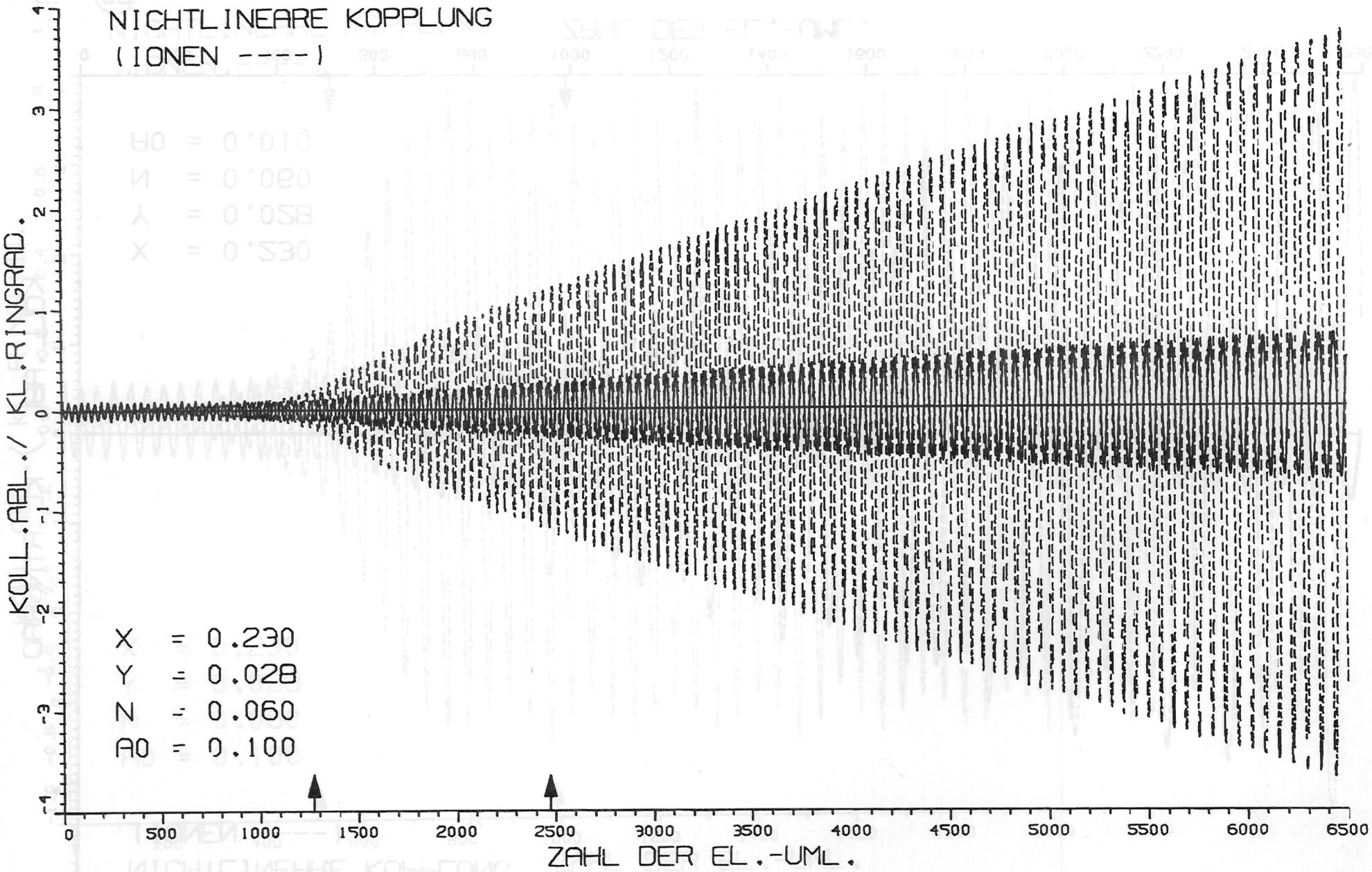

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./KL.RINGRAD.
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
X = 0.230
Y = 0.028
N = 0.060
A0 = 0.100
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
5500
6000
6500
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 26

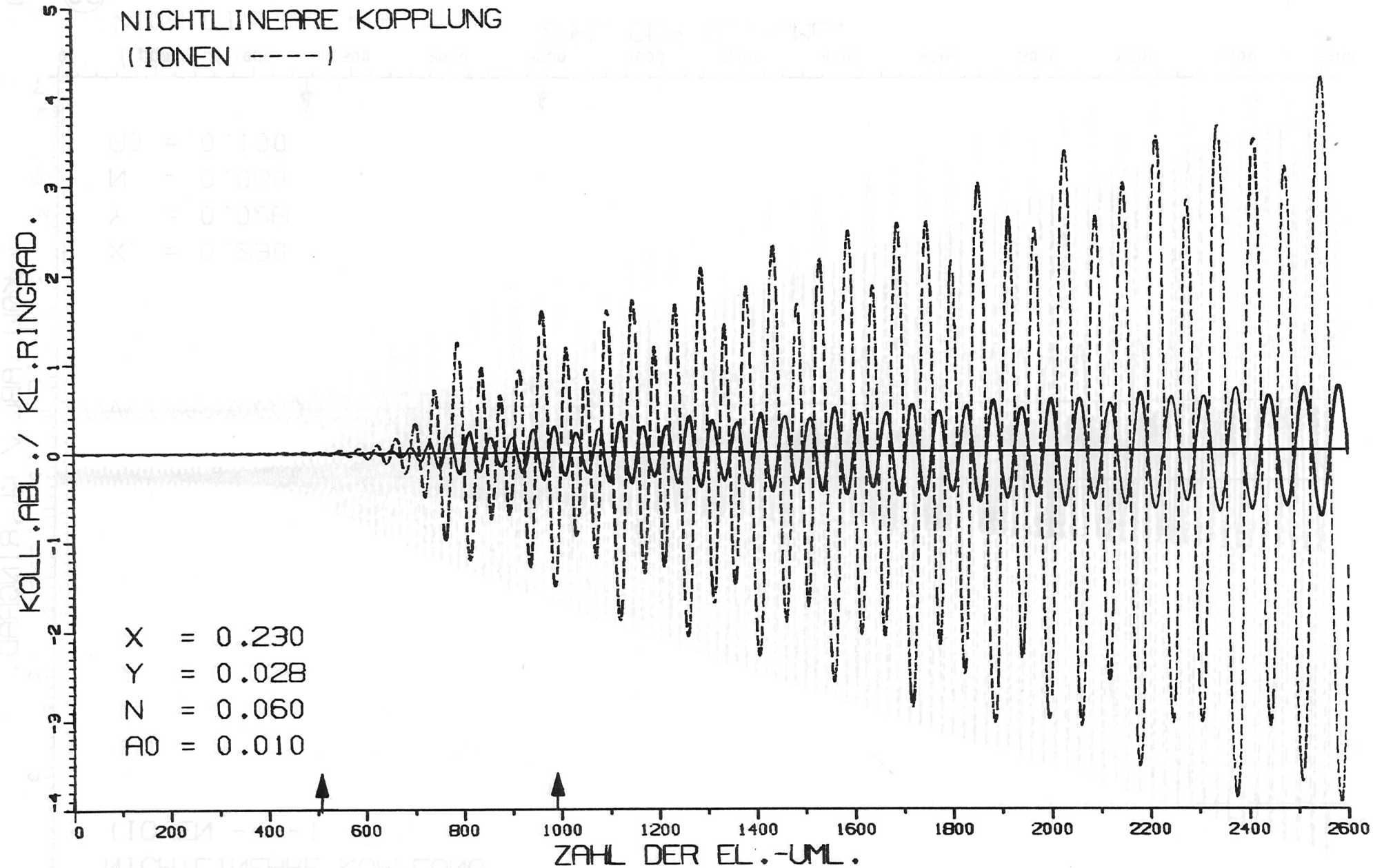

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
X = 0.230
Y = 0.028
N = 0.060
A0 = 0.010
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 27

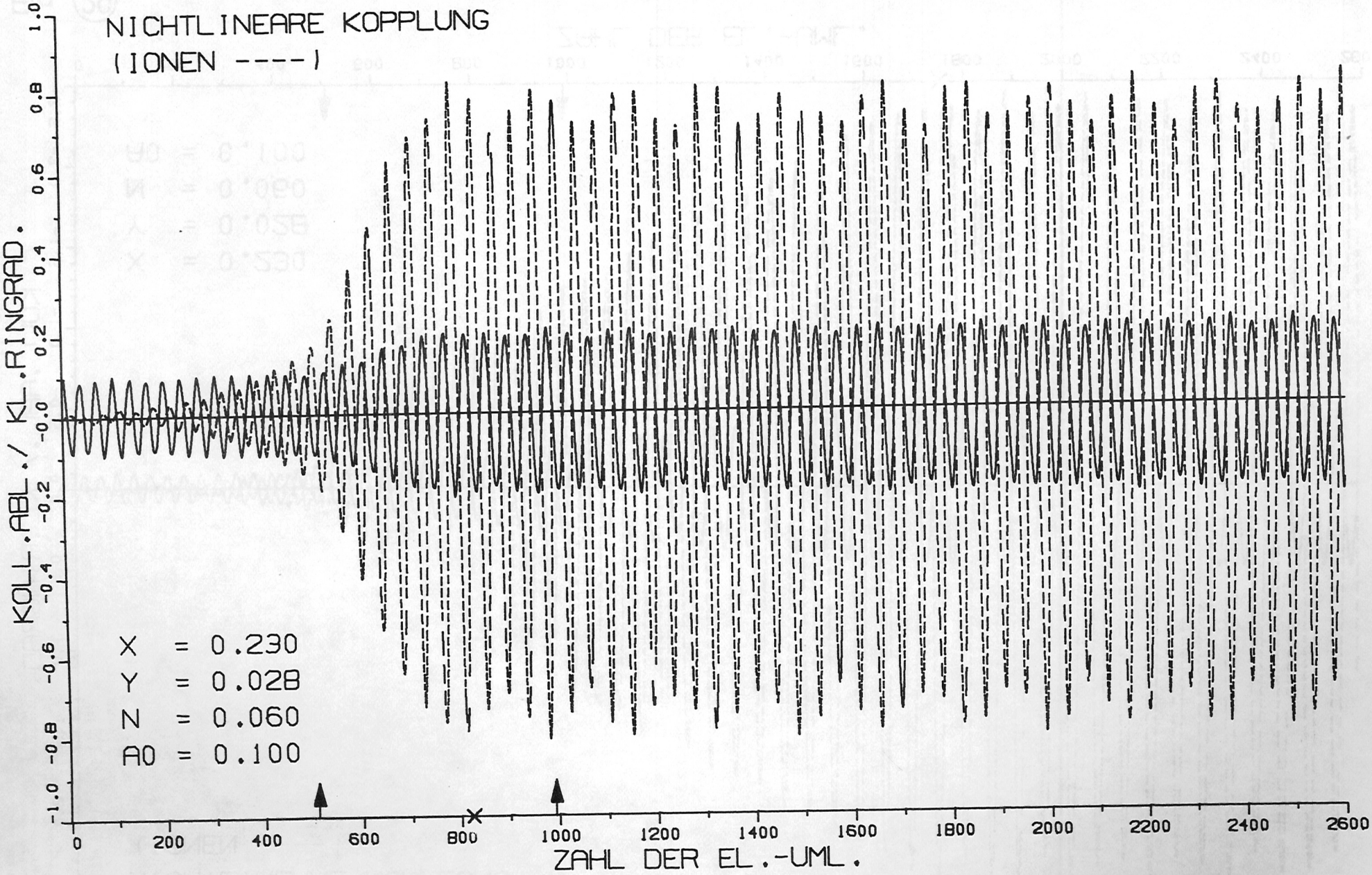

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
X = 0.230
Y = 0.028
N = 0.060
A0 = 0.100
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
ZAHL DER EL.-UML.

Fig. 28

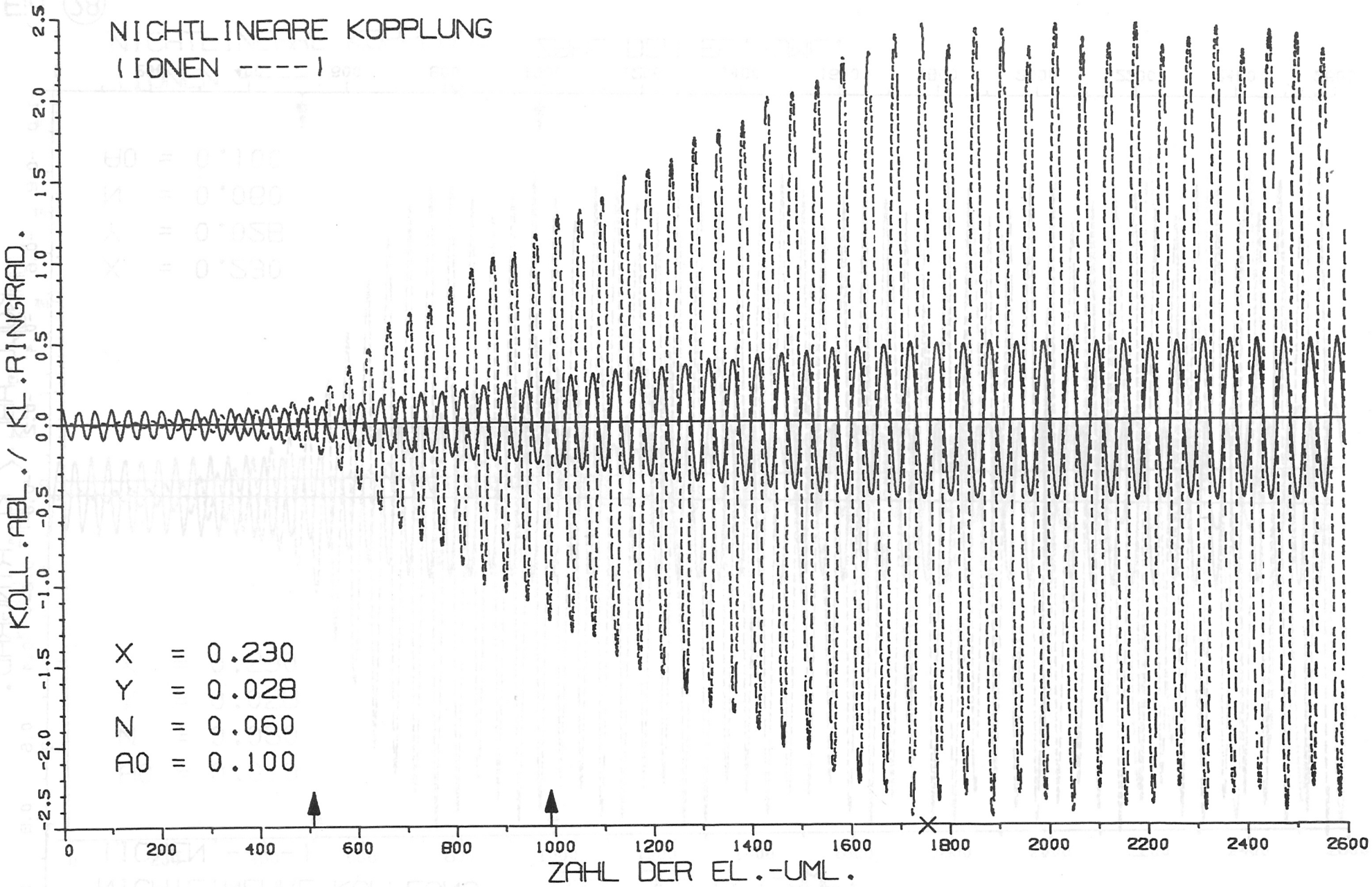

NICHTLINEARE KOPPLUNG
(IONEN ----)
X = 0.230
Y = 0.028
N = 0.060
A0 = 0.100
KOLL.ABL./ KL.RINGRAD.
ZAHL DER EL.-UML.
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600

Fig. 29